Maths collège

Dérivation fonction composée : méthode simple et exemples

Comprenez la dérivation d'une fonction composée avec une méthode claire, des repères visuels et des exemples corrigés pas à pas.

Cours de mathématiques niveau

La dérivation d'une fonction composée consiste à dériver une fonction qui en contient une autre, comme (3x+1)^5 ou √(2x-7). On applique la règle en chaîne : dérivée de la fonction extérieure, puis multiplication par la dérivée de la fonction intérieure.

Vous avez déjà su dériver x^2, puis vous tombez sur $(2x+3)^2$ et tout se brouille ? C'est exactement le moment où la dérivation de fonction composée entre en jeu. Beaucoup d'élèves sentent qu'il faut faire "quelque chose en plus", sans savoir quoi repérer en premier. Le bon réflexe n'est pas de calculer vite, mais d'identifier la couche extérieure et l'expression intérieure. Avec une méthode visuelle, quelques formes types et des erreurs fréquentes bien expliquées, cette notion devient beaucoup plus simple qu'elle n'en a l'air.

En bref : les réponses rapides

Comment savoir rapidement si une expression est une composition ou un produit ? — Si une expression est placée à l'intérieur d'une autre, comme dans (2x+1)^4 ou sin(3x), on a une composition. Si deux expressions sont simplement multipliées, comme $x^2(3x+1)$, on utilise d'abord la dérivation d'un produit.

Pourquoi faut-il multiplier par la dérivée de la fonction intérieure ? — Parce que la variation de la fonction extérieure dépend elle-même de la variation de l'expression intérieure. La règle de chaîne mesure ces deux variations en même temps.

Peut-on dériver une composition de trois fonctions avec la même méthode ? — Oui. On dérive la couche la plus extérieure, puis on multiplie successivement par les dérivées des couches intérieures jusqu'à la variable x.

Quelle différence entre f∘g et g∘f pour la dérivée ? — L'ordre change la fonction obtenue, donc la dérivée aussi. En général, f∘g et g∘f ne sont ni égales ni dérivées de la même façon.

Reconnaître une dérivation de fonction composée en quelques secondes

Une **fonction composée** apparaît quand une expression est placée à l'intérieur d'une autre, par exemple dans $(3x+1)^5$, $\sqrt{2x-7}$ ou $\sin(4x)$. Pour faire une **dérivation fonction composée**, on repère d'abord la fonction extérieure, puis la fonction intérieure, et on applique la **règle de dérivation en chaîne** : dérivée de l'extérieur, évaluée à l'intérieur, puis multiplication par la dérivée de l'intérieur.

Sans formalisme lourd, composer signifie *faire agir une fonction sur le résultat d'une autre*. Si $g(x)=3x+1$ et $f(u)=u^5$, alors $f\circ g$ signifie $f(g(x))=(3x+1)^5$. Les écritures $f\circ g$, $g\circ f$ et **GOF** reviennent souvent dans les recherches d'élèves ; elles ne disent rien d'autre que "on remplace la variable de la fonction extérieure par la sortie de l'autre". Attention : $f\circ g\neq g\circ f$ en général. La notion est surtout travaillée au **lycée**, mais elle reste accessible dès qu'on sait reconnaître une puissance, une racine, un inverse ou une fonction trigonométrique appliquée à une expression plus simple.

La version scolaire du **théorème de dérivation des fonctions composées**, souvent appelée **règle de chaîne**, s'écrit dans le **cas réel** :

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x).$$

Le *cas général* existe en études supérieures, mais ici l'idée utile est concrète : on dérive l'enveloppe, puis on n'oublie jamais de multiplier par la dérivée du contenu. Cette méthode donne immédiatement la **dérivée fonction composée** de nombreuses formes usuelles. Le bon réflexe consiste à se demander : "Quelle est la dernière opération faite sur x ?" Si la dernière opération est "élever au carré", "prendre la racine", "prendre le sinus", alors cette opération définit la fonction extérieure.

Forme à reconnaître	Fonction extérieure	Fonction intérieure	Dérivée
$(u(x))^n$	$t\mapsto t^n$	$u(x)$	$n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$t\mapsto\sqrt{t}$	$u(x)$	\$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}\$

$\frac{1}{u(x)}$	$t \mapsto \frac{1}{t}$	$u(x)$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^{2}$
$e^{u(x)}$	$t \mapsto e^{t}$	$u(x)$	$e^{u(x)} \times u'(x)$
$\sin(u(x))$	$t \mapsto \sin(t)$	$u(x)$	$\cos(u(x)) \times u'(x)$
$\cos(u(x))$	$t \mapsto \cos(t)$	$u(x)$	$-\sin(u(x)) \times u'(x)$

Exemple 1 : pour $h(x)=(3x+1)^5$, l'extérieur est t^5 et l'intérieur est $3x+1$. Donc

$$h'(x)=5(3x+1)^4 \times 3 = 15(3x+1)^4.$$

Exemple 2 : pour $k(x)=\sqrt{2x-7}$, l'extérieur est $\sqrt{t}$ et l'intérieur est $2x-7$. Ainsi $$ k'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-7} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-7}. $$ La logique est toujours la même. Si vous savez nommer l'extérieur et l'intérieur, la **fonction composée f o g dérivée** devient presque mécanique.

Applications rapides : $((x^2+4)^3)'=3(x^2+4)^2 \times 2x = 6x(x^2+4)^2$; $\left(\frac{1}{5x-2}\right)' = -\frac{5}{(5x-2)^{2}$; $(e^{x^{2})' = e^{x^{2} \times 2x = 2xe^{x^{2}$; $(\sin(7x))'=\cos(7x) \times 7 = 7\cos(7x)$. L'erreur fréquente consiste à dériver seulement l'extérieur, par exemple écrire $(3x+1)^{5'}=5(3x+1)^4$ en oubliant le facteur 3 . Autre piège : confondre produit et composition. $x^2\sin(x)$ est un produit ; $\sin(x^2)$ est une composition.

À retenir

À retenir : une expression est composée si *quelque chose est à l'intérieur de quelque chose*. Repérez l'extérieur, puis l'intérieur. Appliquez ensuite

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \times g'(x).$$

Cette méthode couvre l'essentiel du **théorème** au niveau scolaire et suffit pour reconnaître très vite une **dérivation fonction composée** dans les exercices courants.

La méthode intérieure / extérieure : 10 cas types pour ne plus se tromper

Pour **comment dériver une fonction composée**, gardez toujours le même ordre : repérer la **fonction extérieure**, identifier la **fonction intérieure**, dériver l'extérieur sans ouvrir l'intérieur, puis multiplier par la dérivée de l'intérieur. Cette règle marche pour $(ax+b)^n$, $\sqrt{ax+b}$, $\frac{1}{ax+b}$, $e^{u(x)}$, $\ln(u(x))$, $\sin(u(x))$ et $\cos(u(x))$.

Une fonction composée s'écrit $f \circ g$, c'est-à-dire $x \mapsto f(g(x))$. La question *quelle est la dérivée d'une fonction composée* a une réponse unique : on dérive l'extérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur. En notation compacte,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x).$$

Le piège classique est d'oublier le facteur final. Autre piège : $f \circ g$ **et** $g \circ f$ ne coïncident pas en général. Si $f(x)=x^2$ et $g(x)=x+1$, alors $f \circ g(x)=(x+1)^2$ tandis que la **fonction composée** $g \circ f$ vaut x^2+1 ; leurs dérivées sont donc différentes.

Le bon réflexe est algorithmique. Pour $(ax+b)^n$, l'extérieur est "puissance n", l'intérieur est $ax+b$; dérivée : $n(ax+b)^{n-1} \times a$. Pour $\sqrt{ax+b}$: $\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\times a$. Pour $\frac{1}{ax+b}$: $-\frac{a}{(ax+b)^{2}}$. Même logique pour les formes générales : $(u(x))^n \mapsto n(u(x))^{n-1}u'(x)$, $e^{u(x)} \mapsto e^{u(x)}u'(x)$, $\ln(u(x)) \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, $\sin(u(x)) \mapsto \cos(u(x))u'(x)$, $\cos(u(x)) \mapsto -\sin(u(x))u'(x)$. Si un quotient contient une composition, par exemple $\frac{1}{1+x^{2}}$, l'extérieur est encore "inverse". En **analyse**, la règle est plus générale ; avec **plusieurs variables**, la dérivation fait intervenir une **matrice**, mais ici on reste sur le programme scolaire.

Exemple 1. Dériver $y=\sqrt{3x-2}$. Extérieur : racine. Intérieur : $3x-2$. On dérive l'extérieur sans toucher l'intérieur : $\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$. Puis on multiplie par la dérivée intérieure, égale à 3. Donc $$y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}.$$ **Exemple 2.** Dériver $y=\sin(x^2+1)$. Extérieur : sinus. Intérieur : x^2+1. On obtient d'abord $\cos(x^2+1)$, puis on multiplie par $2x$:

$$y' = 2x\cos(x^2+1).$$

C’est exactement la méthode à suivre quand on se demande *comment dérivée* $f \circ g$ sans se perdre dans les parenthèses.

Cas de **dérivée composée de 3 fonctions** : $y=e^{\sqrt{2x+1}$. Ici, trois niveaux sont imbriqués : extérieur $e^{(\cdot)}$, milieu $\sqrt{\cdot}$, intérieur $2x+1$. On dérive couche par couche :

$y'=e^{\sqrt{2x+1} \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1} \times 2
=\frac{e^{\sqrt{2x+1}{\sqrt{2x+1}.$

Le cas piégeux voisin est $y=\frac{1}{\cos x}$: l’extérieur est l’inverse, pas le cosinus. Ainsi

$$y'=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Cette lecture intérieure/extérieure évite les erreurs de signe et de niveau.

$1)$ $y=(5x-1)^4$: $y'=4(5x-1)^3\times 5=20(5x-1)^3$. $2)$ $y=\ln(3x+7)$: $y'=\frac{3}{3x+7}$. $3)$ $y=\cos(x^3)$: $y'=-\sin(x^3)\times 3x^2=-3x^2\sin(x^3)$. $4)$ $y=\frac{1}{\sqrt{x+1} =(x+1)^{-1/2}$: $y'=-\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}=-\frac{1}{2(x+1)^{3/2}$. Mini-grille d’auto-correction : avez-vous repéré l’extérieur exact, gardé l’intérieur inchangé au début, puis multiplié par sa dérivée ? Si une étape manque, la réponse est presque toujours fausse.

À retenir

À retenir : pour toute fonction composée, pensez *extérieur puis intérieur*. La règle est

$$(f\circ g)'=f'(g(x))\times g'(x).$$

Elle couvre les **10 cas types** utiles au lycée, y compris le quotient et les trois niveaux imbriqués. Et souvenez-vous : $f\circ g\neq g\circ f$ en général.

Dériver une fonction composée (Cas général) - Terminale — Yvan Monka

Quand il y a trois couches : dériver une composition de 3 fonctions

Face à $\sin\!\big((2x+1)^{3}\big)$ ou à $e^{\sqrt{x+4}}$, la règle reste **simple** : on repère la **couche extérieure**, puis la couche du milieu, puis la couche intérieure, et on *multiplie* les dérivées. Pour $\sin\!\big((2x+1)^{3}\big)$, on dérive d'abord le sinus, puis le cube, puis l'expression affine : $[\sin(u)]'=\cos(u)$, $[(v)^{3}]'=3v^{2}$, $[2x+1]'=2$, donc $[\sin((2x+1)^{3})]'=\cos\!\big((2x+1)^{3}\big)\times 3(2x+1)^{2}\times 2$. Même logique pour $e^{\sqrt{x+4}}$: l'extérieur est l'exponentielle, le milieu la racine, l'intérieur $x+4$, d'où $[e^{\sqrt{x+4}}]'=e^{\sqrt{x+4}}\times \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\times 1$. Le bon mémo : **extérieur, milieu, intérieur**, ou encore *pelure par pelure*, comme un oignon.

Erreurs fréquentes, contre-exemples et mini-grille d'auto-correction

L'**erreur la plus fréquente** en **dérivation par composition** consiste à dériver seulement la forme extérieure en oubliant la dérivée de l'expression intérieure. Ainsi, pour $f(x)=(3x+1)^{2}$, on n'obtient pas $f'(x)=2(3x+1)$, mais $f'(x)=2(3x+1)\times 3$. Une **auto-correction dérivée** de dix secondes évite la plupart des fautes de copie.

Une fonction composée a la forme $f(x)=h(u(x))$: on applique d'abord la fonction intérieure u, puis la fonction extérieure h. La règle correcte est $f'(x)=h'(u(x))\times u'(x)$. C'est le point central pour **comment dériver une fonction** quand il y a des parenthèses, une **racine carrée**, un **logarithme népérien** ou un **cosinus** d'une expression.

Les **erreurs dérivée fonction composée** reviennent presque toujours aux mêmes confusions. Un **produit** n'est pas une **composition** : $x^{2}(x+1)$ se dérive avec la formule du produit, alors que $(x+1)^{2}$ relève de la composition. Autre piège : croire que $f\circ g$ et $g\circ f$ donnent la même chose. Si $f(x)=x^{2}$ et $g(x)=3x+1$, alors $f\circ g(x)=(3x+1)^{2}$ tandis que $g\circ f(x)=3x^{2}+1$; leurs dérivées, $2(3x+1)\times 3$ et $6x$, ne coïncident pas. Enfin, certaines dérivées exigent une condition de définition : pour $\ln(u(x))$, il faut $u(x)>0$; pour $\sqrt{u(x)}$, il faut $u(x)\geq 0$, et la dérivée $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ impose en plus $\sqrt{u(x)}\neq 0$ au dénominateur.

Contre-exemple 1. Pour $f(x)=\cos(2x-5)$, beaucoup écrivent $f'(x)=\sin(2x-5)$: double faute, car la dérivée du **cosinus** vaut $-\sin$, et il faut multiplier par la dérivée intérieure. Le bon résultat est donc $f'(x)=-\sin(2x-5)\times 2=-2\sin(2x-5)$. **Contre-exemple 2.** Pour $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, écrire $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^{2}+1}$ oublie encore l'intérieur. On doit obtenir $g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+1}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}$. Ce dernier point rassure : un résultat peut être juste sous une autre forme algébrique, par simplification. Voilà pourquoi les **contre-exemples dérivation** sont plus utiles que des exemples trop propres.

Je corrige souvent avec une mini-grille mentale en **5 questions**. 1) Ai-je repéré une composition $h(u(x))$ ou un produit ? 2) Ai-je bien dérivé l'extérieur *puis* multiplié par $u'(x)$? 3) Le signe est-il correct, surtout pour $\cos(u)$, dont la dérivée est $-\sin(u)\times u'(x)$? 4) Les conditions sont-elles respectées pour $\ln(u)$ et $\sqrt{u}$? 5) Mon résultat peut-il se simplifier sans changer sa valeur ? Test rapide : pour $\ln(4x+1)$, la bonne dérivée est $\frac{4}{4x+1}$, avec la condition $4x+1>0$; pour $(5-x)^3$, la bonne dérivée est $3(5-x)^2\times(-1)$. Cette **auto-correction dérivée** transforme une copie hésitante en copie solide.

À retenir

À retenir : dès qu'une expression est *dans* une autre, pensez composition et cherchez le facteur intérieur. Vérifiez aussi le type d'écriture — **produit** ou composition —, le signe, puis le domaine pour le **logarithme népérien** et la **racine carrée**. En pratique, c'est la méthode la plus fiable pour éviter les fautes classiques de **dérivation par composition**.

Exercices corrigés progressifs : de la forme simple au piège classique

Pour progresser en **dérivée fonction composée exercice**, il faut varier les niveaux : forme directe, racine, inverse, puis expression à deux ou trois couches. À chaque ligne, on nomme la **fonction extérieure**, la fonction intérieure, puis on justifie le facteur ajouté : *on multiplie par la dérivée de l'intérieur*.

Une fonction composée s'écrit $f(g(x))$. Sa dérivée suit la règle : si $u(x)=f(v(x))$, alors

$$u'(x)=f'(v(x))\times v'(x).$$

Le réflexe utile est simple : repérer la **coquille extérieure** — carré, racine, inverse, exponentielle — puis l'expression enfermée. Cette logique, très présente dans les recherches *dérivée fonction composée exercices corrigés pdf* ou *fonction composée f o g pdf*, vaut mieux qu'une mémorisation brute.

Protocole court : si l'expression est $(\cdot)^2$, $\sqrt{\cdot}$, $\frac{1}{\cdot}$ ou $e^{\cdot}$, la dérivée commence par celle de l'extérieur, puis se **compose** avec l'intérieur, et enfin se multiplie par la dérivée de cet intérieur. En revanche, si l'expression est une somme simple comme x^2+3x, il n'y a pas de composition globale. Les ressources de **Wikipédia**, **Wikiversité** ou une **fiche de révision** en **PDF** donnent la règle ; ici, on l'applique avec verbalisation systématique.

Exemple résolu 1 : $h(x)=(3x+1)^2$. Extérieure : $t\mapsto t^2$. Intérieure : $x\mapsto 3x+1$. Donc

$$h'(x)=2(3x+1)\times 3=6(3x+1).$$

On n'écrit pas seulement le résultat : on explique pourquoi le 3 apparaît, car il vient de la dérivée de l'intérieur. Exemple résolu 2 : $k(x)=\sqrt{5x-4}$. Extérieure : $t\mapsto\sqrt{t}$. Intérieure : $5x-4$. Alors $$k'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x-4}}\times 5=\frac{5}{2\sqrt{5x-4}}.$$ La méthode reste identique, même si la forme change.

Exercice 1 : dériver $m(x)=\frac{1}{2x+3}$. Extérieure : $t\mapsto\frac{1}{t}$. Intérieure : $2x+3$. Donc $$m'(x)=-\frac{1}{(2x+3)^{2}}\times 2=-\frac{2}{(2x+3)^{2}}.$ Exercice 2 : dériver n(x)=e^{x^{2}+1} . C'est le cas classique de dérivée exponentielle composée : extérieure t\mapsto e^{t} , intérieure x^{2}+1$, donc

$$n'(x)=e^{x^2+1}\times 2x.$$

Exercice 3 : avec $f(x)=x^{2}+1 et g(x)=3x , calculer f\circ g puis g\circ f . On a f(g(x))=(3x)^{2}+1=9x^{2}+1 , donc (f\circ g)'(x)=18x . Mais g(f(x))=3(x^{2}+1)=3x^{2}+3 , donc (g\circ f)'(x)=6x$. Même lettres, ordre différent, résultat différent : c'est le piège classique.

Exercice 4 : $p(x)=\sqrt{\frac{1}{x+1}$. Deux couches. On dérive d'abord la racine, puis l'inverse, puis $x+1$: $$p'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x+1}\times \left(-\frac{1}{(x+1)^{2}\right).$$ L'erreur fréquente consiste à oublier une couche ou à dériver seulement le dénominateur. En plusieurs variables, la logique de composition continue avec la règle de chaîne, mais c'est *un autre chapitre* des exercices corrigés dérivation.

À retenir

À retenir : repérer l'extérieur, nommer l'intérieur, dériver l'extérieur *sans ouvrir*, puis multiplier par la dérivée intérieure. Si deux compositions se ressemblent, comme $f\circ g$ et $g\circ f$, on les calcule séparément. Une bonne **fiche de révision** ou un **PDF** utile n'est pas une liste de réponses : c'est une méthode écrite ligne par ligne.

Comment on dérivée f ∘ g ?

Pour dériver f ∘ g, j'applique la règle de la chaîne : (f ∘ g)'(x) = f'(g(x)) × g'(x). Je commence par identifier la fonction extérieure f et la fonction intérieure g. Ensuite, je dérive la fonction extérieure en gardant l'intérieur, puis je multiplie par la dérivée de la fonction intérieure.

Quelle est la dérivée d'une fonction composée ?

La dérivée d'une fonction composée se calcule avec la règle de la chaîne. Si h(x) = f(g(x)), alors h'(x) = f'(g(x)) × g'(x). Cela signifie qu'on dérive d'abord la fonction extérieure, puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure. Cette méthode est essentielle en dérivation.

Quelle est la dérivé d'une fonction composée GOF ?

Si on note GOF = g ∘ f, alors la dérivée est (g ∘ f)'(x) = g'(f(x)) × f'(x). L'ordre est important : on dérive la fonction extérieure g en remplaçant sa variable par f(x), puis on multiplie par la dérivée de f. C'est l'application directe de la règle de la chaîne.

Comment calculer la dérivation d'une fonction ?

Pour calculer la dérivation d'une fonction, j'identifie d'abord sa forme : somme, produit, quotient ou composition. Ensuite, j'applique la formule adaptée. Par exemple, pour une fonction composée, j'utilise la règle de la chaîne. Il faut aussi connaître les dérivées usuelles comme x^2, sin(x), exp(x) ou ln(x).

comment dériver une fonction

Pour dériver une fonction, je repère sa structure puis j'applique la bonne règle de calcul. Une puissance, un produit, un quotient ou une composition ne se dérivent pas de la même manière. L'objectif est de trouver l'expression de la variation instantanée de la fonction, souvent notée $f'(x)$.

Comment dériver f ◦ g ?

Pour dériver $f \circ g$, j'utilise la formule $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$. En pratique, je dérive la fonction extérieure sans toucher à l'intérieur, puis je multiplie par la dérivée de la fonction intérieure. Exemple : si $f(u)=u^2$ et $g(x)=3x+1$, alors $(f\circ g)'(x)=2(3x+1)\times 3$.

Quelle est la dérivée d'une fonction composée ?

La dérivée d'une fonction composée suit toujours la règle de la chaîne. Si une fonction s'écrit comme une fonction dans une autre, alors on dérive l'extérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur. Formellement, si $y = f(g(x))$, alors $y' = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Quelle est la dérivée d'une fonction composée g o f ?

Pour une composée g o f, la dérivée est $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$. Je garde bien l'ordre de composition : f agit d'abord, puis g. Il ne faut donc pas inverser les rôles. Cette formule permet de dériver rapidement des expressions comme $\sin(x^2)$, $\exp(3x)$ ou $\ln(1+x)$.

Retenez l'idée essentielle : quand une expression est à l'intérieur d'une autre, on pense composition, puis règle en chaîne. Le plus efficace est de prendre l'habitude de nommer mentalement la fonction extérieure et la fonction intérieure avant d'écrire la dérivée. En vous entraînant sur quelques cas types comme une puissance, une racine ou un sinus d'expression, vous gagnerez vite en sécurité. Vérifiez toujours votre résultat avec une mini-grille : forme reconnue, règle appliquée, dérivée intérieure présente.

Mis à jour le 05 mai 2026