Maths collège

Dérivé racine de u : formule, conditions et pièges à éviter

Apprenez la formule du dérivé de racine de u, ses conditions, les cas limites et les erreurs fréquentes avec exemples simples.

Cours de mathématiques niveau

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $u'/(2\sqrt{u})$ lorsque u est dérivable et strictement positive. Attention : la fonction $\sqrt{u}$ peut être définie pour $u = 0$, mais la formule de dérivation avec $2\sqrt{u}$ au dénominateur ne s'applique que là où $u(x) > 0$.

« Pourquoi mon professeur dit-il que la racine existe en 0, mais que sa dérivée n'existe pas forcément ? » C'est exactement le genre de détail qui bloque beaucoup d'élèves. Quand on travaille sur le dérivé racine de u, la difficulté ne vient pas seulement de la formule, mais surtout des conditions d'application. Entre domaine de définition, domaine de dérivabilité et erreurs classiques comme confondre $\sqrt{x^2}$ avec x, on peut vite se tromper. Ici, l'objectif est d'avoir une méthode simple, rigoureuse et rassurante pour savoir quand utiliser la formule, et quand il faut s'arrêter pour réfléchir.

En bref : les réponses rapides

Comment dériver $\sqrt{ax+b}$ rapidement ? — On identifie $u=ax+b$, donc $u'=a$. La dérivée vaut alors $a/(2\sqrt{ax+b})$, sur les x tels que $ax+b>0$.

Pourquoi la dérivée de $\sqrt{u}$ n'existe-t-elle pas toujours au point où $u=0$? — La formule contient $2\sqrt{u}$ au dénominateur, donc elle ne s'écrit pas en $u=0$. Il faut étudier le point séparément, car la fonction peut être définie sans être dérivable.

Quelle différence entre dériver $\sqrt{u}$ et dériver $u^{1/2}$? — C'est la même idée : $\sqrt{u} = u^{1/2}$. En utilisant la dérivée de la puissance composée, on retrouve $u'/(2\sqrt{u})$, avec les mêmes conditions sur le domaine.

Comment savoir si un résultat de dérivée avec racine est correct ? — Il faut vérifier trois points : la présence de u', le dénominateur $2\sqrt{u}$, et le domaine où l'expression obtenue a un sens.

Quelle est la formule du dérivé de racine de u ?

La réponse directe est la suivante : si u **est dérivable** et si $u(x)>0$ sur l'intervalle étudié, alors la **dérivée de racine de u** est donnée par $$\left(\sqrt{u}\right)'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}.$$ Autrement dit, pour la **racine carrée de u**, on dérive d'abord la fonction extérieure $x\mapsto\sqrt{x}$, puis on multiplie par u *prime*. C'est une application classique des **règles de dérivation** pour une **fonction composée**.

Cette formule vient du **tableau des dérivées élémentaires** : on sait que, pour $x>0$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}$. Si l'on remplace ensuite x par une fonction $u(x)$, on obtient la formule composée. Le schéma mental est simple : fonction extérieure $f(x)=\sqrt{x}$, fonction intérieure $u(x)$, donc $(f\circ u)'=(f'\circ u)\times u'$. Écrit proprement, $$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u(x)} \times u'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}.$$ Le mot-clé à retenir est **composition**. On ne dérive pas seulement la racine, on dérive une expression entière placée sous la racine carrée. C'est exactement le type de calcul rencontré dans les **dérivées élémentaires** et les règles usuelles vues au collège avancé ou au lycée.

La condition à ne pas rater est nette : la **fonction** u doit être définie là où l'on travaille, et la formule avec le dénominateur $2\sqrt{u(x)}$ s'emploie là où $u(x)>0$. Pourquoi ? Parce que $\sqrt{u(x)}$ doit exister, et surtout parce qu'on ne peut pas diviser par 0. Le *nombre dérivé* de $\sqrt{u}$ ne se traite donc pas automatiquement aux points où $u(x)=0$. C'est le piège classique : confondre *domaine de définition* de la racine carrée, où $u(x)\geq 0$, et domaine de dérivabilité de la formule, où l'écriture $$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}$$ demande strictement $u(x)>0$. Cette nuance explique beaucoup d'erreurs d'élèves quand ils appliquent la formule trop vite, sans vérifier le signe de l'expression sous la racine.

Deux exemples très courts permettent de fixer la méthode. Pour $f(x)=\sqrt{3x+1}$, on pose $u(x)=3x+1$, donc $u'(x)=3$, et pour $x>-\frac{1}{3}$, $$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}.$$ Pour $g(x)=\sqrt{x^2+4}$, on prend $u(x)=x^2+4$, donc $u'(x)=2x$, et comme $x^2+4>0$ pour tout réel, $$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+4}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+4}.$$ Dans les deux cas, la logique est identique : identifier la **fonction composée**, calculer u **prime**, puis appliquer la formule sans oublier la condition sur la **racine carrée**. C'est une règle courte, mais elle demande de la précision.

Quand la formule est-elle valable ? Domaine, dérivabilité et cas limite quand $u=0$

La formule $$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ nes'emploiequelàoù u(x)>0 .Si u=0 ,laracinedéfiniepeutexistersansqueladérivabilitésuive.Ilfautdoncséparerclairementledomainededéfinitionde \sqrt{u}$ et l'ensemble des points où sa dérivée existe vraiment.

La **condition d'existence** de $\sqrt{u(x)}$ est simple : il faut $u(x)\geq 0$. C'est le **domaine de définition**. Mais la formule de dérivation contient le dénominateur $2\sqrt{u(x)}$, donc elle n'a de sens que si $u(x)\neq 0$, plus précisément si u est **strictement positive** au point étudié, et en pratique sur un **intervalle** autour de ce point. Voilà le piège classique : une fonction peut être définie en un point sans être dérivable en ce point. Le *cas limite* $u(x)=0$ est délicat, car la racine est bien définie, mais la formule devient inutilisable. On ne peut donc pas réciter une règle de **fonction usuelle** sans vérifier d'abord où elle s'applique réellement.

Situation	$\sqrt{u}$ définie ?	Formule applicable ?	Dérivabilité certaine ?
$u(x)<0$	Non	Non	Non
$u(x)=0$	Oui	Non	Non, à étudier au cas par cas
$u(x)>0$	Oui	Oui	Oui si u est dérivable

Les exemples montrent pourquoi ce tri est indispensable. Si $u(x)=x$, alors $\sqrt{u(x)}=\sqrt{x}$ est définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0 : la pente devient infinie. Si $u(x)=x^2$, alors $\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^{2}=|x|$; la fonction est définie en 0, mais non dérivable en 0 malgré le fait que u soit dérivable. Même chose pour $u(x)=(x-1)^2$ en 1 : on obtient $ \sqrt{(x-1)^{2}=|x-1|$, non dérivable en 1. Ces contre-exemples sont précieux : quand $u \text{égale} 0$, la **stricte positivité** manque, et la formule ne dit plus rien. La bonne méthode consiste à repérer le **domaine de définition**, puis à chercher sur quel **intervalle** u reste positive. C'est seulement sur cet intervalle que la dérivation de $\sqrt{u}$ est justifiée.

Dérivée de racine carrée de u - Terminale — L.P.B. Maths vidéo

Pourquoi $\sqrt{x^{2}}$ est un piège classique

$\sqrt{x^{2}}$ ne vaut pas x sur tout $\mathbb{R}$, mais $|x|$. Voilà le piège. Si $x=-3$, on a $\sqrt{x^{2}}=\sqrt{9}=3$, et non -3. Par conséquent, la fonction étudiée n'est pas la droite x, mais la **valeur absolue**, avec un comportement différent selon le signe de x.

L'automatisme faux consiste à écrire $\left(\sqrt{x^{2}}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}}}$. Cette formule se simplifie en réalité en $\frac{x}{|x|}$ pour $x\neq 0$. Donc la dérivée vaut -1 **si** $x<0$ et 1 **si** $x>0$. En 0, l'expression n'a pas de sens, et cela confirme que $|x|$ n'est *pas dérivable* en 0, même si elle y est bien définie. Le point délicat est là : la formule de dérivation de $\sqrt{u}$ exige souvent une discussion quand $u(x)=0$. Ici, $u(x)=x^2$ s'annule en 0, et la tangente présente une pointe. Retenir $\sqrt{x^{2}}=|x|$ évite donc une erreur très fréquente en dérivation.

Comment dériver une expression avec $\sqrt{u}$ sans se tromper : méthode pas à pas

Pour dériver $\sqrt{u}$, on suit toujours la même routine : vérifier que $u\geq 0$, repérer la **fonction intérieure** u, calculer u', appliquer la formule $$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$ puis finir la **simplification** en gardant les restrictions. Cette **méthode dérivée racine de u** évite presque toutes les *erreurs fréquentes*.

Voici les **étapes de dérivation** à mémoriser, exactement comme dans le **tableau des dérivées** des *fonctions usuelles*, où $\sqrt{x}$ est une fonction de base mais ici en **composition** avec une autre expression.

1. Vérifie le domaine de définition : il faut $u(x)\geq 0$, et si u est un **quotient**, son dénominateur doit aussi être non nul.
2. Repère la **fonction intérieure** u : c'est le morceau placé sous la racine, qu'il s'agisse d'un **polynôme** ou d'un quotient.
3. Dérive u séparément : si $u(x)=5x-2$, alors $u'(x)=5$; si $u(x)=x^2+3x+1$, alors $u'(x)=2x+3$.
4. Applique la formule de composition : $$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$ en pensant que cette formule demande aussi $\sqrt{u}$ au dénominateur, donc $u(x)>0$ pour la dérivabilité.
5. Simplifie proprement, sans tricher sur les signes ni sur le domaine, puis note les valeurs interdites et les points où $u=0$.

Exemple simple : pour $f(x)=\sqrt{5x-2}$, on a $5x-2\geq 0$, donc $x\geq\frac{2}{5}$. La dérivée existe seulement si $5x-2>0$, donc pour $x>\frac{2}{5}$. On obtient $$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}.$$ Faux réflexe classique : écrire $\frac{1}{2\sqrt{5x-2}}$ en oubliant u'. Pour g(x)=\sqrt{x^{2}+3x+1} , même logique : domaine donné par x^{2}+3x+1\geq 0 , dérivabilité là où x^{2}+3x+1>0 , et $g'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^{2}+3x+1}.$ Ici, dériver seulement la racine serait une erreur. On ne dérive pas " \sqrt{}$ toute seule". On dérive une composition.

Le cas $h(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-4}$ force à être plus vigilant. Le domaine vérifie $\frac{2x+1}{x-4}\geq 0$ avec $x\neq 4$. Ensuite, on dérive la **fonction intérieure** quotient : $ $u(x)=\frac{2x+1}{x-4},\qquad u'(x)=\frac{2(x-4)-(2x+1)}{(x-4)^{2}=\frac{-9}{(x-4)^{2}.$ Donc $h'(x)=\frac{-9}{2(x-4)^{2}\sqrt{\frac{2x+1}{x-4}. $ Bonne méthode : domaine, puis dérivée, puis simplification . Mauvais réflexe : simplifier abusivement la racine, ignorer x=4 , ou croire que la formule marche au point où u=0 . Non. Si u=0 , la fonction peut être définie, mais la dérivée donnée par la formule ne l'est pas, car le dénominateur vaut 0$.

Exercices corrigés sur le dérivé de racine de u avec commentaires sur les erreurs typiques

Les meilleurs **exercices corrigés dérivée racine de u** forcent à vérifier le **domaine** avant toute dérivation. Il faut savoir traiter un cas affine, un trinôme, un quotient et le piège $\sqrt{x^{2}$, puis expliquer l'erreur commise. C'est cette *lecture diagnostique* qui sécurise la méthode et améliore la **vérification du résultat**.

Durée 1h, 20 points

Exercice 1 (4 points)

Déterminer le domaine de définition puis dériver $f(x)=\sqrt{3x+1}$.

Exercice 2 (4 points)

Étudier puis dériver $g(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$.

Exercice 3 (4 points)

Déterminer l'ensemble où la fonction est définie, puis dérivable, pour $h(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}$ et calculer $h'(x)$.

Exercice 4 (4 points)

Comparer $\sqrt{x^{2}$ et x, puis dériver la bonne expression.

Exercice 5 (4 points)

Expliquer la différence entre $\sqrt{uv}$, $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ et leurs dérivées. Donner la dérivée de $k(x)=\sqrt{(x+2)(x-1)}$.

Correction

Exercice 1. On exige $3x+1\geq 0$, donc $x\geq -\frac{1}{3}$. La dérivée existe seulement si $3x+1>0$, soit $x>-\frac{1}{3}$. Ainsi $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. L’erreur typique consiste à écrire la formule sans tester le signe de l’expression sous la racine, ou à croire que la dérivée existe au bord quand $3x+1=0$. **Exercice 2.** On factorise $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, donc le domaine est $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$. La dérivabilité vaut sur $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ et $g'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^{2}-4x+3}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^{2}-4x+3}}$. Le **corrigé commenté** doit signaler que les zéros de u ne sont pas automatiquement des points dérivables.

Exercice 3. Pour le **quotient** $\frac{x+1}{x-2}$, il faut résoudre $\frac{x+1}{x-2}\geq 0$ avec $x\neq 2$, d’où le domaine $(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$. La dérivabilité vaut sur $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. Comme $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^{2}}=\frac{-3}{(x-2)^{2}}$, on obtient $h'(x)=\frac{-3}{2(x-2)^{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$. L’erreur réelle la plus fréquente est d’oublier $x\neq 2$, ou de dériver le numérateur et le dénominateur séparément. **Exercice 4.** $\sqrt{x^{2}}=\lvert x\rvert$, pas x. Donc la dérivée vaut -1 si $x<0$, 1 si $x>0$, et elle n’existe pas en 0. Ce piège sur la **valeur absolue** ruine beaucoup de copies. Pour se relire, tester $x=-2$ suffit : $\sqrt{(-2)^{2}}=2\neq -2$.

Exercice 5. La confusion sur la **racine de uv** est classique. $\sqrt{uv}$ est une seule racine appliquée à un **produit uv**, alors que $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ est une somme ; en général, $\sqrt{u+v}\neq\sqrt{u}+\sqrt{v}$. Pour $k(x)=\sqrt{(x+2)(x-1)}$, on pose $u(x)=(x+2)(x-1)$, donc $u'(x)=2x+1$ et $k'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{(x+2)(x-1)}}$ sur le domaine où $u>0$. Côté **primitive de racine de u** ou **intégrale de racine de u**, il n’existe pas de formule universelle aussi simple que pour la dérivée ; certains cas se traitent par substitution, d’autres non. La **vérification du résultat** tient en trois réflexes : vérifier $u(x)\geq 0$, exclure les points où $u(x)=0$ pour la dérivée, puis contrôler si le signe et l’unité algébrique du résultat sont cohérents.

Quelle est la primitive de √u ?

En général, la primitive de √u ne s’écrit pas simplement sans connaître u(x). Si u est la variable elle-même, alors ∫√u du = ∫u^(1/2) du = (2/3)u^(3/2) + C. Si u dépend de x, il faut souvent un changement de variable, surtout si l’intégrande contient aussi u'(x).

Quel est le dérivé de la racine de u et v ?

Pour √u, la dérivée est u'/(2√u), à condition que u>0. Pour √v, c’est de la même façon v'/(2√v). Si vous parlez de √(uv), j’utilise la chaîne : la dérivée vaut (u'v + uv')/(2√(uv)), tant que uv>0 sur l’intervalle étudié.

Quelle est la dérivée d'une racine ?

La formule de base est simple : si f(x)=√u(x), alors f'(x)=u'(x)/(2√u(x)). C’est un cas classique de dérivation en chaîne. Cette expression est valable lorsque u(x)>0. Si la racine porte directement sur x, on obtient donc d/dx(√x)=1/(2√x), pour x>0.

Quelle est l'intégrale de √u ?

L’intégrale de √u dépend du contexte. Si u est la variable d’intégration, alors ∫√u du = (2/3)u^(3/2) + C. Si u=u(x), je vérifie s’il existe u'(x) dans l’expression pour faire un changement de variable. Sans cela, il n’existe pas de formule universelle directement applicable.

Peut-on dériver √u quand u(x)=0 ?

Pas automatiquement. La formule u'/(2√u) devient impossible à utiliser quand u(x)=0, car le dénominateur s’annule. Il faut alors étudier la dérivabilité au point concerné avec la définition. Par exemple, √x n’est pas dérivable en 0, même si elle est bien définie et continue en ce point.

Pourquoi $\sqrt{(x^2)}$ ne vaut-il pas toujours x ?

Parce que la racine carrée désigne toujours la valeur positive ou nulle. Ainsi, $\sqrt{(x^2)}=|x|$, et non x dans tous les cas. Si x≥0, alors |x|=x. Mais si x<0, on a |x|=-x. Cette distinction est essentielle, notamment quand on dérive ou qu’on simplifie une expression.

Retenez l’idée essentielle : la formule du dérivé racine de u est simple, mais elle ne fonctionne que là où u(x) > 0 et où u est dérivable. Avant de dériver, vérifiez donc toujours le domaine, puis appliquez la chaîne sans oublier le dénominateur 2√u. En cas de doute, testez les points où u = 0 : ce sont souvent eux qui révèlent les pièges. Pour progresser, entraînez-vous sur quelques expressions variées et comparez systématiquement définition, dérivabilité et résultat final.

Mis à jour le 05 mai 2026