



# Dérivée racine x : formule, démonstration et exercices

Dérivée de  $\sqrt{x}$  : formule  $1/(2\sqrt{x})$ , domaine, preuve en 0 et exercices corrigés pour comprendre vite et sans erreur.

Cours de mathématiques niveau

**La dérivée de  $\sqrt{x}$  est  $1/(2\sqrt{x})$  pour tout  $x$  strictement positif. La fonction est définie pour  $x \geq 0$ , mais elle n'est pas dérivable en 0, car la pente de la courbe y devient infinie.**

Pourquoi la dérivée de  $\sqrt{x}$  semble-t-elle facile à retenir, mais provoque-t-elle autant d'erreurs en contrôle ? Beaucoup d'élèves écrivent la bonne formule, puis oublient la condition  $x > 0$  ou confondent définition et dérivabilité. Si je pars de l'idée simple que  $\sqrt{x}$  s'écrit  $x^{(1/2)}$ , tout devient plus clair : on relie la règle des puissances, le comportement de la courbe près de 0 et les exercices classiques comme  $\sqrt{u(x)}$  ou  $1/\sqrt{x}$ . L'objectif est de comprendre la formule, pas seulement de la réciter.

## En bref : les réponses rapides

**Pourquoi  $\sqrt{x}$  n'est-elle pas dérivable en 0 ?** — Parce que la pente de la courbe devient infinie quand  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. La fonction est définie en 0, mais la dérivée n'y existe pas.

**Comment dériver  $\sqrt{u(x)}$  ?** — On applique la règle de la chaîne : si  $f(x)=\sqrt{u(x)}$ , alors  $f'(x)=u'(x)/(2\sqrt{u(x)})$ , à condition que  $u(x)>0$  sur l'intervalle étudié.

**Quelle différence entre  $\sqrt{x^2}$  et  $x$  ?** — On a  $\sqrt{x^2}=|x|$  et non  $x$  en général. La dérivée dépend donc du signe de  $x$  et n'existe pas en 0.

**Comment dériver  $1/\sqrt{x}$  ?** — On peut écrire  $1/\sqrt{x}=x^{(-1/2)}$ , puis dériver :  $f'(x)=-1/(2x\sqrt{x})$  pour  $x>0$ .

## Quelle est la dérivée de $\sqrt{x}$ ?

La **dérivée racine x** se retient ainsi : si  $f(x)=\sqrt{x}$ , alors  $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$  pour tout  $x>0$ . La fonction est définie sur  $x \geq 0$ , mais elle n'est pas dérivable en 0 : le **taux de variation** y devient

infini. C'est la formule de base de la **dérivée racine carrée**, et c'est aussi celle qu'on retrouve dans les recherches du type *dérivée de racine de x demonstration*.

Le point qui piège souvent est la différence entre **domaine de définition** et **domaine de dérivabilité**. La fonction racine carrée existe dès que  $x \geq 0$ , car  $\sqrt{x}$  n'a de sens réel que pour ces valeurs. En revanche, sa dérivée n'existe que pour  $x > 0$ . Pourquoi ? Parce qu'en  $x = 0$ , la courbe monte très brutalement : la tangente devient verticale, donc la pente n'est pas un nombre réel fini. Autrement dit, la **fonction** est bien définie en  $x = 0$ , mais sa **dérivée** ne l'est pas. Cette nuance est essentielle, notamment quand on écrit un résultat propre en exercice : on ne dit pas seulement "la dérivée vaut  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ", on précise aussi le **domaine de dérivabilité**.

La justification rapide passe par l'écriture  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ . On utilise alors la règle de dérivation des puissances : si  $f(x) = x^n$ , alors  $f'(x) = nx^{n-1}$ , tant que cela a un sens sur le domaine considéré. Avec la **puissance**  $1/2$ , on obtient  $\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . La formule  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  n'a de sens que si  $\sqrt{x} \neq 0$ , donc pour  $x > 0$ . C'est précisément pour cela que  $x = 0$  est exclu du domaine de dérivabilité. En pratique, dès qu'une racine carrée simple apparaît, on pense à cette réécriture en puissance, car elle rend la dérivation immédiate et évite les erreurs de manipulation.

Graphiquement, cette **dérivée racine carrée** raconte quelque chose de simple : plus  $x$  grandit, plus la pente de la courbe diminue. Près de  $x = 0$ , en revanche, la pente explose, ce qui explique l'absence de dérivabilité en ce point. Cette intuition aide beaucoup avant même la démonstration complète par le taux de variation. Elle sert aussi de base aux cas proches : la dérivée de  $\sqrt{u(x)}$  avec la chaîne, celle de  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , ou encore celle de  $\sqrt{x^2}$  qui demande davantage d'attention sur les valeurs absolues. Si vous retenez une seule idée, gardez celle-ci : la **fonction racine carrée** est définie sur  $x \geq 0$ , mais sa formule de **dérivée racine x** vaut uniquement sur  $x > 0$ .

## Pourquoi la dérivée de $\sqrt{x}$ vaut-elle $1/(2\sqrt{x})$ ?

On retrouve la formule de deux façons, et c'est justement ce qui rend la **preuve** convaincante. Soit on écrit  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  puis on applique les **règles de dérivation** du *tableau des dérivées élémentaires*, soit on fait une vraie **démonstration** avec le **quotient différentiel**. Dans les deux cas, on obtient la même dérivée :  $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x > 0$ .

La méthode la plus rapide consiste à réécrire la fonction racine carrée sous forme de puissance :  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ . On peut alors utiliser la règle de dérivation classique, présente dans tout **tableau des dérivées élémentaires** : si  $f(x) = x^n$ , alors  $f'(x) = nx^{n-1}$ . En prenant  $n = \frac{1}{2}$ , on obtient  $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

$$\left(x^2\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Or} \quad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Cette écriture est simple, nette, et elle montre bien la logique des **règles de dérivation**. En revanche, elle suppose qu'on admet déjà la formule sur les puissances. Pour un élève qui veut comprendre la **dérivabilité** de la fonction racine carrée, la seconde approche éclaire davantage le mécanisme.

La **dérivée de racine de x démonstration** par définition part du taux d'accroissement :

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Cette démonstration est une vraie *preuve*, pas seulement une recette.

Cette formule n'a de sens que pour  $x > 0$ , car au dénominateur apparaît  $\sqrt{x}$ . En  $x = 0$ , la fonction  $\sqrt{x}$  est bien définie, mais sa dérivée ne l'est pas :  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  "explose" quand  $x$  se rapproche de 0 par la droite. On dit donc que la fonction racine carrée est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , mais pas en 0. C'est un point central de la **dérivabilité** de la fonction racine carrée. Par conséquent, si vous voyez plus loin des expressions comme  $\sqrt{9x}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  ou  $\sqrt{x+1}$ , la formule de base reste la même, mais elle se combine avec une autre **règle de dérivation**, souvent la dérivation composée. La logique est toujours identique : comprendre la forme, vérifier le domaine, puis dériver proprement.

Une minute pour calculer la dérivée de racine de x — Matazart

## Démonstration par le taux d'accroissement

Pour **démontrer** la formule, on part de  $f(x) = \sqrt{x}$  et de sa définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Le quotient est gênant. On le simplifie en multipliant en haut et en bas par le **conjugué**,  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ .

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$C'est la clé. Ensuite, quand  $h$  tend vers 0,  $\sqrt{x+h}$  tend vers  $\sqrt{x}$ , donc  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$$

Le résultat est donc  **$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$** . Cette méthode montre aussi pourquoi on travaille avec  $x > 0$  pour la dérivabilité : il faut que  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{x+h}$  existent près de  $x$ , et la formule finale



contient  $\sqrt{x}$  au dénominateur. En  $x=0$ , la pente "explose" et la dérivée finie n'existe pas.

## Comment dériver une racine plus compliquée : $\sqrt{u}$ , $\sqrt{x^2}$ , $1/\sqrt{x}$ et racine cubique

Dès qu'une expression se cache sous la racine, on utilise la **règle de la chaîne** : si  $f(x) = \sqrt{u(x)}$ , alors  $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$  tant que  $u(x) > 0$ . Cette formule de dérivation s'écrit  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  ou encore la **racine cubique**, avec un point d'attention sur le domaine et la **valeur absolue**.

La racine carrée simple vérifie  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$ . Si l'intérieur n'est plus  $x$  mais une **fonction composée**  $u(x)$ , on multiplie par la dérivée intérieure : c'est la **règle de la chaîne**. En revanche, au point où le dénominateur s'annule, la dérivée n'existe généralement pas.

La formule utile à retenir pour la **dérivée racine u** est donc  $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ . Elle vaut seulement lorsque  $u(x) > 0$ .  
 Exemple 1 :  $f(x) = \sqrt{3x+1}$ , on a  $u(x) = 3x+1$  et  $u'(x) = 3$ , donc  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ .  
 Exemple 2 :  $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ , pour  $x > -\frac{1}{3}$ , on a  $u(x) = x^2+4$  et  $u'(x) = 2x$ , donc  $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ .  
 Exemple 3 :  $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ , pour  $x^2+4 > 0$ , on a  $u(x) = x^2+4$  et  $u'(x) = 2x$ , donc  $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ .

Le cas de la **dérivée**  $1/\sqrt{x}$  se traite mieux en écrivant  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ . Alors  $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$ .  
 On peut aussi voir  $f$  comme l'inverse de  $u(x) = \sqrt{x}$ , ce qui rappelle la règle générale  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ .  
 Si on se demande comment dériver  $U \times V$ , la réponse tient en une ligne :

$$(UV)' = U'V + UV'$$

Cette règle du **produit de fonctions** sert souvent lorsque la racine apparaît multipliée par autre chose, par exemple  $x\sqrt{x+1}$ . Néanmoins, pour  $1/\sqrt{x}$ , la forme puissance reste la plus rapide et la plus propre.

Le piège classique est la **dérivée de racine de**  $x^2$ . On pourrait croire que  $\left(\sqrt{x^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ , mais il faut l'aborder avec précaution :  $\sqrt{x^2} = |x|$ . La fonction vaut donc  $|x|$ , pas  $x$ . Par conséquent, sa dérivée est

$$\frac{x}{|x|}$$





**Exercice 2** □ : dériver  $g(x) = \sqrt{2x+5}$  .

### Voir le corrigé

Domaine :  $2x+5 \geq 0$  , donc  $x \geq -\frac{5}{2}$  . Pour la dérivée, il faut  $2x+5 > 0$  , donc  $x > -\frac{5}{2}$  . Avec  $u(x) = 2x+5$  et  $u'(x) = 2$  ,  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$  .

**Exercice 3** □ : dériver  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  .

### Voir le corrigé

Domaine :  $x > 0$  . On écrit  $h(x) = x^{-\frac{1}{2}}$  . Alors  $h'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$  .

**Exercice 4** □□ : étudier  $k(x) = \sqrt{x^2}$  .

### Voir le corrigé

Attention :  $\sqrt{x^2} = |x|$  , pas  $x$  . La **valeur absolue** change tout. Donc

$$k(x) = |x|,$$

puis

$$k'(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad k'(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

En  $x = 0$  , la dérivée n'existe pas. C'est une des **erreurs fréquentes** en dérivée de sous une racine.

**Exercice 5** □□ : dériver  $m(x) = \sqrt{x+1} + 3\sqrt{x}$  .

### Voir le corrigé



Domaine :  $x+1 \geq 0$  et  $x \geq 0$ , donc  $x \geq 0$ . Pour dériver, il faut  $x > 0$ . On obtient  $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x > 0$ .

**Exercice 6** : dériver  $n(x) = x\sqrt{x}$ .

### Voir le corrigé

Domaine :  $x \geq 0$ , dérivable pour  $x > 0$ . Par produit,  $n'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .  
\$ Condition :  $x > 0$ .

**Exercice 7** : dériver  $p(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ .

### Voir le corrigé

Domaine :  $x \geq 0$  et  $x+1 \neq 0$ , donc  $x \geq 0$ . Pour  $x > 0$ , par quotient,  $p'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}(1)}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ .  
Le résultat est valide pour  $x > 0$ .

**Exercice 8** : dériver  $q(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ .

### Voir le corrigé

Domaine intérieur :  $\frac{x^2+1}{x} \geq 0$ . Comme  $x^2+1 > 0$ , il faut  $x > 0$ . Posons  $u(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ , donc  $u'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ . Alors  $q'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \quad \text{pour } x > 0$ . Bonne méthode : simplifier  $u$  avant de dériver.

Les **erreurs fréquentes** reviennent toujours : oublier la condition  $x > 0$ , oublier le  $u'(x)$  dans  $\sqrt{u(x)}$ , confondre  $\sqrt{x^2}$  avec  $x$  au lieu de  $|x|$ , ou croire que la formule de dérivation vaut en  $0$ . Pour relire un **exercice corrigé**, j'utilise une méthode en trois gestes : je contrôle d'abord le domaine de définition, je vérifie ensuite la règle choisie, puis je relis la dernière ligne pour voir si la condition sur  $x$  est bien écrite. Cette routine évite presque toutes les fautes.

## Comprendre la courbe de $\sqrt{x}$ et le sens de sa dérivée

La dérivée  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  donne une lecture très visuelle de la **courbe** de la **fonction racine carrée** : pour tout  $x > 0$ , elle est positive, donc la fonction croît, mais cette  **pente**  devient de plus en plus faible quand  $x$  augmente. Près de  $0$ , au contraire, la pente explose, ce qui éclaire la **dérivabilité de la fonction racine carrée** : elle est définie en  $0$ , mais non dérivable en ce point.

Sur la  **courbe représentative**  de  $y = \sqrt{x}$ , chaque valeur de la dérivée mesure la pente de la **tangente**. Comme  $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$  dès que  $x > 0$ , la croissance est immédiate : la fonction racine carrée monte toujours, sans jamais redescendre. En revanche, elle ne monte pas partout avec la même rapidité. Si  $x$  grandit, alors  $\sqrt{x}$  grandit aussi, donc le dénominateur de  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  devient plus grand ; par conséquent, la dérivée diminue. Visuellement, la courbe reste croissante, néanmoins elle s'aplatit peu à peu. C'est exactement ce qu'on observe au lycée quand on trace la racine carrée : forte montée au début, puis allure plus douce. Cette lecture graphique aide à relier une formule abstraite à une forme concrète.

Le point délicat est le voisinage de  $0$ . Quand  $x$  se rapproche de  $0$  par valeurs positives,  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  devient très petit, donc  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  devient très grand. La pente de la tangente tend alors vers  $+\infty$  : la courbe se redresse fortement au bord de son domaine  $[0, +\infty[$ . Voilà pourquoi la dérivabilité de la fonction racine carrée s'arrête en  $0$  : on peut calculer  $\sqrt{0} = 0$ , mais on ne peut pas attribuer une pente finie à la courbe en ce point. On retrouve d'ailleurs la formule  $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$  dans un tableau des dérivées de  $\sqrt{x}$ . Elle est aussi très concrète : si on trace la courbe, après avoir alluré la tangente en un point, on comprend sans effort la formule  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  est cohérent.

### Quelle est la dérivée de racine de X ?

La dérivée de racine de  $x$ , soit  $\sqrt{x}$ , est  $1 / (2\sqrt{x})$ . On peut aussi écrire  $x^{(1/2)}$ , puis appliquer la règle des puissances : la dérivée de  $x^{(1/2)}$  vaut  $(1/2)x^{(-1/2)}$ . Cette formule est valable pour  $x > 0$ . En  $x = 0$ , la dérivée n'est pas définie.

### Quelle est la dérivée de X ?

La dérivée de  $x$  est 1. C'est l'une des règles de base en calcul différentiel. Si une fonction vaut simplement  $f(x) = x$ , alors son taux de variation est constant et égal à 1. Autrement dit, quand  $x$  augmente d'une unité, la fonction augmente aussi d'une unité.

### Comment dérivée une racine carré ?

Pour dériver une racine carrée, je la réécris en puissance :  $\sqrt{u} = u^{(1/2)}$ . Ensuite, j'applique la règle de dérivation des puissances et la dérivée de la fonction intérieure. On obtient :  $d/dx[\sqrt{u}] = u' / (2\sqrt{u})$ . Si  $u = x$ , cela donne simplement  $1 / (2\sqrt{x})$ .



## Comment dériver $U \times V$ ?

Pour dériver un produit  $U \times V$ , j'utilise la formule du produit :  $(U \times V)' = U'V + UV'$ . Il faut dériver le premier facteur en gardant le second, puis garder le premier et dériver le second. Cette règle est indispensable dès qu'une fonction est écrite comme une multiplication de deux expressions.

## Comment dériver une racine cubique ?

Une racine cubique se note  $\sqrt[3]{u} = u^{(1/3)}$ . Pour la dériver, j'applique la règle des puissances et la dérivée de  $u$ . On obtient :  $d/dx[\sqrt[3]{u}] = u' / (3u^{(2/3)})$ . Si  $u = x$ , alors la dérivée de  $\sqrt[3]{x}$  est  $1 / (3x^{(2/3)})$ . Cette formule vaut pour  $x \neq 0$ .

## Comment calculer la dérivée d'une fonction racine carrée ?

Pour calculer la dérivée d'une fonction racine carrée, je transforme d'abord  $\sqrt{u}$  en  $u^{(1/2)}$ . Ensuite, j'utilise la formule :  $(\sqrt{u})' = u' / (2\sqrt{u})$ . Il faut donc identifier la fonction intérieure  $u$ , calculer sa dérivée  $u'$ , puis remplacer dans la formule. C'est la méthode standard la plus rapide.

## Quelle est la dérivée de $1$ sur $U$ ?

La dérivée de  $1/u$  se calcule en écrivant  $u^{(-1)}$ . On applique alors la règle des puissances composée :  $d/dx[1/u] = -u' / u^2$ . Cette formule est valable tant que  $u$  ne vaut pas 0. Elle est très utile pour dériver des quotients simples sans utiliser directement la formule générale du quotient.

## Quelle est la dérivée de $1 \times X$ ?

Si  $1 \times$  signifie  $1 \times x$ , alors la fonction est simplement égale à  $x$ , donc sa dérivée vaut 1. Si vous vouliez écrire  $1/x$ , alors la dérivée est différente : elle vaut  $-1/x^2$ . Il faut donc bien distinguer une multiplication  $1 \times x$  d'une fraction 1 sur  $x$ .

Retenez l'essentiel :  $\sqrt{x}$  se dérive en  $1/(2\sqrt{x})$  uniquement pour  $x > 0$ , même si la fonction existe déjà en 0. Pour éviter les fautes, vérifiez toujours le domaine avant de dériver, puis appliquez la règle de la chaîne dès qu'une autre expression apparaît sous la racine. Si vous révisez, entraînez-vous tout de suite sur trois types d'exercices :  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{(u(x))}$  et  $1/\sqrt{x}$ .

Mis à jour le 05 mai 2026

[Continue sur maths-college.fr](https://maths-college.fr)

Maths collège - Document pédagogique