Maths collège

Développement limité : comprendre, choisir la méthode, éviter les pièges

Définition simple du développement limité, méthode pas à pas, erreurs fréquentes et exercices corrigés pour bien l'utiliser.

Cours de mathématiques niveau

Un développement limité est une écriture approchée d'une fonction par un polynôme au voisinage d'un point, souvent 0. Il sert à simplifier des calculs, étudier des limites et décrire le comportement local d'une fonction avec une précision liée à l'ordre choisi.

Pourquoi écrit-on parfois sin(x) ≈ x ou e^x ≈ 1 + x quand x est très petit ? C'est exactement l'idée du développement limité : remplacer, près d'un point, une expression compliquée par un polynôme plus simple à manipuler. Quand on débute, on confond souvent formule à apprendre, approximation et égalité exacte. Pourtant, avec une bonne méthode, tout devient plus clair : reconnaître le point de développement, choisir le bon ordre, utiliser les DL usuels ou Taylor, puis vérifier qu'on ne tombe pas dans les erreurs classiques de composition ou de troncature.

En bref : les réponses rapides

Quelle différence entre un développement limité et un équivalent ? — Un équivalent donne seulement le terme dominant, alors qu'un développement limité fournit plusieurs termes successifs et une précision d'ordre. Le DL est donc plus riche pour les limites fines et les approximations.

À quel ordre faut-il développer pour lever une forme indéterminée ? — Il faut développer jusqu'au premier terme non nul après simplification. En pratique, on augmente l'ordre tant que les termes se compensent.

Peut-on faire un développement limité ailleurs qu'en 0 ? — Oui, on peut développer au voisinage de n'importe quel point où la fonction est assez régulière. On remplace alors x par a+h pour travailler autour du point a.

Comment vérifier rapidement qu'un développement limité est plausible ? — On contrôle le terme constant avec la valeur de la fonction au point, puis le terme linéaire avec la dérivée si elle existe. Enfin, on vérifie le signe et le comportement local.

Développement limité : définition simple, notation et idée utile

Un **développement limité** est une **approximation polynomiale** d'une fonction près d'un point, souvent 0. Au lieu de garder une expression compliquée, on la remplace localement par un polynôme plus simple, utile pour calculer, comparer, approcher une **limite** ou décrire le comportement d'une courbe. C'est l'idée centrale de la **développement limité définition** : simplifier sans perdre l'essentiel *au voisinage* du point étudié.

Dire qu'on travaille **au voisinage d'un point**, c'est regarder ce qui se passe quand la variable se rapproche de ce point. Par exemple, près de 0, la fonction $\sin(x)$ se comporte presque comme x. On écrit alors une **développement limité formule** du type

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{quand } x \to 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ donne la partie visible de l'approximation, et le terme **petit o**, noté $o(x^n)$, signifie que l'erreur devient négligeable devant x^n quand x tend vers 0. Ce n'est donc pas une égalité exacte sur tout l'axe, mais une égalité de comportement local. En **analyse**, cette nuance change tout.

L'**ordre d'un développement limité** indique jusqu'à quelle puissance on pousse l'approximation. Un DL d'ordre 1 donne une **approximation affine** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{quand } x \to a.$$

Si la fonction est une **fonction dérivable**, cette écriture relie directement le DL à la tangente : près de a, la courbe ressemble à sa droite tangente. Plus l'ordre est élevé, plus le **polynôme** capte finement le comportement local. Voilà pourquoi les DL servent à étudier une limite, une vitesse de variation, ou un calcul numérique rapide. L'idée n'est pas de remplacer la fonction partout, mais seulement là où l'approximation reste pertinente.

On rencontre les développements limités au lycée, puis en **analyse**, en physique et en calcul scientifique. La formule de **Taylor-Young** donne le cadre théorique le plus classique : si une fonction est assez régulière, on peut construire son approximation polynomiale à partir de ses dérivées au point choisi. C'est la version rigoureuse d'une intuition simple : une fonction lisse laisse deviner sa forme locale à partir de quelques informations bien choisies. Des ressources comme **Wikipédia** donnent des tableaux de DL usuels, mais comprendre le sens de $o(x^n)$ et la différence entre égalité et approximation évite les erreurs mécaniques. Un DL n'est pas un formulaire à réciter. C'est un outil pour voir plus clair près d'un point.

> **À retenir**
> Un développement limité remplace une fonction par un polynôme près d'un point. Le polynôme décrit le comportement local, et $o(x^n)$ mesure une erreur négligeable devant x^n. L'ordre fixe la précision de l'approximation.

Comment faire un développement limité : la méthode pas à pas et l'arbre de décision

Pour **faire un développement limité**, repérez d'abord le **point** étudié, l'**ordre** demandé et l'objectif : approcher une valeur, lever une indétermination, comparer deux fonctions. Ensuite, choisissez la bonne voie : *DL usuel*, changement de variable puis composition, produit ou quotient, ou **formule de Taylor** si les dérivées sont accessibles. La règle décisive : ne garder que les termes utiles jusqu'à $o((x-a)^n)$.

Une bonne **développement limité fiche méthode** tient en trois questions. En quel point travaille-t-on ? Si le point est 0, les formules usuelles suffisent souvent ; si le point est $a\neq 0$, on pose souvent $h=x-a$. Jusqu'à quel ordre ? Un DL à l'ordre 2 n'autorise pas à conserver un terme en $(x-a)^3$. Pour quel usage ? Si vous cherchez une limite, seuls les premiers termes non nuls comptent ; pour une approximation numérique, il faut aussi estimer l'erreur. **Quand utiliser un développement limité** ? Quand la fonction est régulière près du point, comme la **fonction exponentielle**, la **fonction logarithme** sur son domaine, ou les **fonctions trigonométriques**. En *développement limité cours*, l'idée centrale est simple : remplacer localement une fonction par un polynôme plus facile à manipuler.

L'arbre de décision est pratique. Si la fonction est usuelle, utilisez le formulaire : $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2})$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2})$, $\sin x=x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})$. Mini-exemple : $\ln(1+2x)=2x-2x^2+o(x^2)$. Si l'expression est composée, faites un changement de variable puis composez : pour $\sqrt{1+3x}$, posez $u=3x$ et utilisez $(1+u)^{1/2}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^{2}}{8}+o(u^{2})$, donc $\sqrt{1+3x}=1+\frac{3x}{2}-\frac{9x^{2}}{8}+o(x^{2})$. Si les dérivées sont simples, la **formule de Taylor développement limité** est directe :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o\big((x-a)^2\big).$$

Exemple avec *Taylor-Young* : pour $f(x)=\cos x$ en 0, on obtient $\cos x=1-\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$.

Méthode	Quand l'utiliser	Avantage	Risque d'erreur
DL usuel	Fonction connue, souvent en 0	Rapide	Oublier le changement de variable
Composition	Expression du type $f(u(x))$	Très efficace	Mal tronquer après substitution
Taylor	Dérivées disponibles en a	Général	Erreur sur les dérivées ou le point

La vraie difficulté est la **troncature**. Après un produit, un quotient ou une composition, on élimine tous les termes au-delà de l'ordre demandé. Exemple : pour $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2, on écrit $1+x+x^{2}+o(x^{2})$, pas davantage. Contre-piège classique : remplacer $\ln(x)$ près de 1 par le DL de $\ln(1+x)$ sans poser $x=1+h$. Il faut écrire $\ln(x)=\ln(1+h)=h-\frac{h^{2}{2}+o(h^{2})$ avec $h=x-1$. Cette rigueur, qu'on retrouve dans des supports d'**Université Côte d'Azur**, évite la plupart des erreurs de signe, de point et d'ordre.

Introduction aux développements limités — Bibmath

Les développements limités usuels à connaître vraiment, sans apprendre par cœur n'importe comment

Près de 0, six **développements limités usuels** suffisent souvent : $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$, $\sin x=x-\frac{x^{3}{6}+o(x^{3})$, $\cos x=1-\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}+o(x^{2})$, $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}{8}+o(x^{2})$. Le vrai enjeu n'est pas de réciter, mais de reconnaître *le signe*, *l'ordre* et la zone de validité : ici, **au voisinage de** 0.

Pour les mémoriser intelligemment, regroupez-les par **familles de comportement**. Les fonctions qui valent 1 en 0 commencent par une constante : e^{x}, $\cos x$, $\frac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$. Celles qui valent 0 en 0 commencent par un terme en x : $\sin x$ et $\ln(1+x)$. Ensuite, observez la logique des signes. e^{x} garde des coefficients positifs ; $\sin x$ et $\ln(1+x)$ alternent vite ; $\cos x$ n'a que des puissances paires ; $\frac{1}{1+x}$ alterne dès le rang 1 ; $\sqrt{1+x}$ ressemble à une version “adoucie” de cette alternance. Enfin, le premier terme non nul donne le sens local : $\sin x \approx x$, donc près de 0 la courbe suit la droite ; $\cos x \approx 1-\frac{x^{2}}{2}$, donc elle part de 1 et baisse ; $\ln(1+x)$ n’a de sens que si $1+x>0$, donc **pas question** d’oublier la condition $x>-1$, même si le DL est utilisé pour x *très petit*.

Erreurs fréquentes, contre-exemples et pièges classiques à éviter

Les **erreurs développement limité** les plus fréquentes viennent d’un mauvais **point 0**, d’un ordre trop faible, d’une composition mal contrôlée ou d’une confusion entre approximation locale et égalité. Les **contre-exemples développement limité** sont décisifs : ils montrent quand un DL éclaire une **limite**… et quand il la fausse.

Le piège le plus courant consiste à développer au mauvais endroit. Un DL en 0 n’aide que si la variable tend vers 0, ou si l’on a d’abord recentré le problème. Par exemple, pour étudier $\sqrt{x}$ au voisinage de 1, écrire $\sqrt{x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$ est faux, car ce DL est centré au mauvais point. La bonne démarche est de poser $x=1+h$, puis $\sqrt{1+h}=1+\frac{h}{2}-\frac{h^{2}}{8}+o(h^{2})$. Même erreur avec les conditions de validité : $\ln(1+x)$ admet un DL près de 0 seulement si $1+x>0$. Un **développement limité** n’est donc pas une formule magique globale sur toute la **fonction**, mais une approximation locale, liée à un point précis et à un voisinage précis. C’est exactement **pourquoi utiliser le développement limité** demande de vérifier le cadre avant de calculer.

Autre piège classique : couper trop tôt. Pour **calculer une limite avec un développement limité**, il faut choisir l’ordre qui lève réellement la **forme indéterminée**. Si l’on cherche $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{3}}$, le DL d’ordre 1, $\sin x=x+o(x)$, ne suffit pas : il donne encore $\frac{o(x)}{x^{3}}$, donc rien d’exploitable. Il faut aller à l’ordre 3 : $\sin x=x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})$, d’où la limite $-\frac{1}{6}$. Même vigilance pour les compositions : si $u(x)=x+x^{2}$, remplacer $\cos(u)$ par $1-\frac{x^{2}}{2}$ sans tenir compte de u^{2} peut être juste à un ordre, faux à l’ordre suivant. En revanche, simplifier abusivement les petits o est dangereux : de $f(x)=x+x^{2}+o(x^{2})$, on ne déduit pas $f(x)=x+o(x^{2})$. Le terme x^{2} compte encore. Un **équivalent** n’est pas non plus un DL complet : $f(x)\sim x$ ne dit rien sur le terme d’ordre 2.

Les **formes indéterminées** rencontrées le plus souvent en limites sont $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$ et $0\times\infty$. Le DL sert justement à transformer ces écritures floues en expression dominante lisible. Par exemple, $\displaystyle \frac{e^{x}-1}{x}$ relève de $0/0$ et devient $1+\frac{x}{2}+o(x)$, donc la limite vaut 1. En revanche, croire qu’un DL donne une égalité partout conduit à des absurdités : écrire $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}{2}$ pour tout x est faux ; cette écriture n'a de sens que près de 0, avec un reste. Quand on doit utiliser le développement limité ? Quand une limite, une approximation numérique ou une comparaison locale résiste aux méthodes directes. Pourquoi on utilise le développement limité ? Pour hiérarchiser les termes, lever une indétermination, obtenir une valeur approchée et comprendre le comportement local d'une fonction. C'est le vrai **résumé de cours** utile : choisir le bon point, le bon ordre, puis ne jamais oublier que le DL reste local.

Exercices corrigés originaux : limites, approximations concrètes et vérification du résultat

Pour progresser en **développement limité exercices corrigés**, il faut varier les usages : limite avec forme indéterminée, composition, formule de Taylor, approximation en **physique** et calcul mental. Le vrai gain n'est pas seulement de trouver une écriture, mais de savoir **comment trouver le DL**, choisir l'ordre utile et vérifier que le résultat reste cohérent près du point étudié.

Durée 1h, 20 points

Exercice 1 (4 points)

Calculer $\lim_{x \to 0}\frac{e^{x}-1-x}{x^{2}}$.

Exercice 2 (4 points)

Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sin(2x+x^2)$.

Exercice 3 (4 points)

À l'aide de Taylor, déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $\cos x$.

Exercice 4 (4 points)

En **physique**, estimer $\sin(0.1)$ et l'erreur commise si l'on remplace le **sinus** par l'angle.

Exercice 5 (4 points)

Estimer mentalement $e^{0.05}$ puis $\ln(1.08)$ avec un DL. Comparer avec une valeur numérique.

Correction

Ex. 1. On choisit le **DL usuel** de l'**exponentielle** : $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$. Alors $e^{x}-1-x=\frac{x^{2}{2}+o(x^{2})$, donc $$ \frac{e^{x}-1-x}{x^{2}=\frac{1}{2}+o(1),$ d'oùlalimite \frac{1}{2} . L'ordre 2 suffitcarledénominateuresten x^{2} . Vérificationrapide : letermeconstantvautbien \frac{1}{2} , positif, cequiestcohérentpuisque e^{x}\geq 1+x prèsde 0 . Ex. 2. Onpose u=2x+x^{2} , avec u=O(x) . Comme \sin u=u-\frac{u^{3}}{6}+o(u^{3}) , onobtient u^{3}=8x^{3}+o(x^{3})$, donc

$$\sin(2x+x^2)=2x+x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

La stratégie est une **composition** : on développe d'abord l'intérieur, puis la fonction extérieure. Mini-contrôle : pas de terme constant, normal car $\sin(0)=0 . </p> <p> Ex. 3. AvecTayloren 0 , \cos x=\cos 0+\cos'(0)x+\frac{\cos''(0)}{2}x^{2}+o(x^{2}) . Or \cos 0=1 , \cos'(0)=0 , \cos''(0)=-1 , donc $ \cos x=1-\frac{x^{2}{2}+o(x^{2}).$ C'estlebonordrepourapprocherun cosinus prèsde 0 . Vérification : lafonctionvaut 1 en 0 etdécroîtlégèrement, cequetraduitlesignenégatif. Ex. 4. Pourunpetitangle, \sin x=x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3}) . Avec x=0{,}1 , $\sin(0{,}1)\approx 0{,}1-\frac{0{,}1^{3}{6} =0{,}099833\ldots$ L'erreursil'onprendseulement \sin x\approx x vautenviron \frac{0{,}1^{3}}{6}\approx 1{,}7\times 10^{-4} . Enmécaniqueouenoptique, cetteapproximationestexcellentepourlespetitsangles. Ex. 5. Pourle développementlimitéexponentielle , e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2}) , donc e^{0{,}05}\approx 1{,}05+0{,}00125=1{,}05125 . Pourle logarithmenépérien , \ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2}) , donc \ln(1{,}08)\approx 0{,}08-0{,}0032=0{,}0768

. Vérificationnumérique : lesvraiesvaleurssontproches, cequiconfirmelechoixd'ordre. </p> <p> PourvérifierunDL, jecontrôlequatrepoints : le termeconstant doitretrouverlavaleurdelafonctionaupoint, lesignedutermelinéairedoitsuivrelesensdevariation, lecomportementprèsdupointdoitrester

x$. Un **développement limité calculateur** ou un outil de **développement limité en ligne** peut aider à tester un résultat, mais il n'explique ni le bon ordre, ni le choix entre usuel, composition ou Taylor. Une vidéo *YouTube* peut illustrer la méthode, pas remplacer l'entraînement raisonné.

Comment montrer qu'une fonction admet un développement limité

Pour montrer qu'une fonction admet un **développement limité** en a, on utilise surtout un critère simple : si elle est **suffisamment dérivable** au voisinage de a, alors la formule de **Taylor-Young** donne un DL. Concrètement, si f est de classe C^n près de a, alors

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

C’est le cas des fonctions usuelles sur leur domaine : $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\ln(1+x)$ près de 0, ou $(1+x)^{\alpha}$ quand cela a un sens.

Au niveau scolaire, on retient donc deux portes d’entrée. Soit on connaît déjà le DL d’une fonction usuelle. Soit on prouve que la fonction est assez régulière et on applique Taylor-Young. Exemple positif : $f(x)=\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 est dérivable autant qu’il faut sur $]-1,+\infty[$, donc $$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}+o(x^{2}).$$ Mais prudence. Une fonction peut être continue sans admettre le DL attendu. Par exemple $f(x)=|x|$ en 0 n’a pas de DL d’ordre 1, car un tel DL imposerait l’existence de $f'(0)$, or la dérivée n’existe pas. Même alerte pour des fonctions comme $\sqrt{x}$ en 0 : elle est définie à droite seulement, donc le cadre du DL usuel doit être précisé.

Comment utiliser la formule de Taylor ?

J’utilise la formule de Taylor pour approcher une fonction près d’un point a par un polynôme. Je calcule les dérivées successives en a, puis j’écris f(x) sous la forme f(a) + f’(a)(x-a) + f’’(a)/2!(x-a)^2 + … selon l’ordre voulu. Ensuite, je garde les termes utiles et j’estime le reste si nécessaire.

Comment faire un développement limité ?

Pour faire un développement limité, je pars soit d’une formule connue, soit de la formule de Taylor si la fonction est assez régulière. Je choisis le point, souvent 0, puis l’ordre souhaité. Ensuite, je remplace, je simplifie et je ne conserve que les termes jusqu’à cet ordre, en ajoutant un petit o ou un grand O.

Quand on doit utiliser le développement limité ?

On utilise un développement limité quand on veut étudier le comportement local d’une fonction près d’un point. C’est très utile pour calculer une limite, comparer deux fonctions, déterminer une tangente, étudier un extremum ou simplifier une expression compliquée. En pratique, je l’emploie dès qu’une approximation polynomiale rend le calcul plus clair.

Comment montrer qu'une fonction admet un développement limité ?

Pour montrer qu’une fonction admet un développement limité en un point, je vérifie en général qu’elle est suffisamment dérivable autour de ce point. Si elle est de classe Cn, la formule de Taylor permet d’obtenir un DL à l’ordre n. On peut aussi utiliser des DL connus et les opérations sur les fonctions pour construire le résultat.

Comment calculer une limité avec un développement limité ?

Pour calculer une limite avec un développement limité, je remplace chaque fonction par son approximation au voisinage du point étudié. Puis je simplifie l’expression en gardant les termes dominants. Cela permet souvent de lever une forme indéterminée comme 0/0. Il faut choisir un ordre assez élevé pour voir apparaître le premier terme non nul.

Quand Peut-on faire un développement limité ?

On peut faire un développement limité lorsqu'on étudie une fonction au voisinage d'un point où elle est assez régulière, ou lorsqu'on dispose d'un DL usuel. En général, il faut que la fonction soit dérivable plusieurs fois au point considéré. On peut aussi combiner, composer ou multiplier des DL connus si les conditions sont respectées.

Pourquoi on utilise le développement limité ?

On utilise le développement limité pour remplacer localement une fonction compliquée par un polynôme plus simple. Cela facilite les limites, les comparaisons asymptotiques, l'étude locale des courbes et certains calculs d'approximation. Je m'en sers aussi pour comprendre quels termes dominent près d'un point et pour obtenir rapidement une information qualitative utile.

Quand Dit-on qu'une fonction admet un développement limité ?

On dit qu'une fonction admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe un polynôme Pn tel que f(x) = Pn(x-a) + o((x-a)^n) quand x tend vers a. Autrement dit, la fonction est approchée par ce polynôme avec une erreur négligeable devant (x-a)^n. C'est une description précise du comportement local.

Le développement limité devient beaucoup plus simple dès qu'on le voit comme un outil de décision : où développe-t-on, à quel ordre, et avec quelle formule ? Retenez d'abord les DL usuels, puis entraînez-vous à repérer les pièges les plus fréquents. Pour progresser vite, refaites chaque exercice en justifiant l'ordre choisi et le reste en o(x^n) : c'est cette rigueur qui fait vraiment la différence en contrôle comme en compréhension.

Mis à jour le 05 mai 2026