Maths collège

Homothétie : comprendre, reconnaître et réussir en 3e

Homothétie en 3e : définition, centre, rapport k, repères visuels et méthode simple pour réussir exercices et Brevet.

Cours de mathématiques niveau

Une homothétie est une transformation géométrique qui agrandit ou réduit une figure à partir d'un centre et d'un rapport k. Le point, son image et le centre restent alignés, les longueurs sont multipliées par |k|, et le signe de k indique de quel côté du centre se place l'image.

Pourquoi deux triangles se ressemblent-ils parfaitement alors que l'un paraît "plus grand" ou "retourné" autour d'un point ? En 3e, c'est souvent là que l'homothétie devient plus claire... ou plus piégeuse. Si vous révisez le Brevet, vous avez surtout besoin d'une méthode simple : repérer le centre, vérifier l'alignement, puis comprendre ce que dit le rapport k. Je vais droit au but : avec quelques réflexes visuels et une attention particulière au signe de k, l'homothétie devient un chapitre beaucoup plus accessible, même si la figure semble compliquée au premier regard.

En bref : les réponses rapides

Comment savoir si le rapport k est positif ou négatif sur une figure ? — Si l'image d'un point est du même côté du centre que le point de départ, le rapport est positif. Si elle est de l'autre côté, le rapport est négatif.

Pourquoi l'aire est-elle multipliée par k^2 dans une homothétie ? — Parce que deux dimensions sont modifiées en même temps. Si chaque longueur est multipliée par $|k|$, alors l'aire est multipliée par $|k| \times |k|$, donc par k^2.

Comment relier homothétie et théorème de Thalès dans un exercice ? — Les deux notions reposent sur des rapports de longueurs et des droites parallèles. L'homothétie donne une lecture de transformation, Thalès fournit souvent la justification calculatoire.

Peut-on avoir une homothétie de rapport 1 ou 0 ? — Avec $k = 1$, la figure ne change pas : c'est l'identité. Avec $k = 0$, tous les points ont pour image le centre, cas utile pour comprendre la définition mais rarement exploité en collège.

Comprendre l’homothétie en 3e : idée simple, vocabulaire utile et premier repère visuel

Une **homothétie** est une **transformation géométrique** qui agrandit ou réduit une figure à partir d’un **centre d’homothétie** et d’un **rapport d’homothétie** k. Pour un point A et son image A', les points O, A et A' sont alignés, et la distance au centre vérifie $OA' = |k| \times OA$. Le signe de k change la position de l’image : si $k\>;0$, l’image reste du même côté de O ; si $k\<;0$, elle passe de l’autre côté. C’est l’idée clé en **homothétie 3ème**.

On peut la voir comme un “zoom” centré en O. Simple et visuel. Si $k\>;1$, on a un **agrandissement**. Si $0\<;k\<;1$, on a une **réduction**. Si $k=1$, la figure ne change pas. Si $k=0$, toute **image d’un point** est le centre O, ce qui écrase la figure en un seul point. En géométrie euclidienne, on observe surtout les longueurs et les angles ; en *géométrie affine*, on retient surtout l’alignement et les rapports sur une droite.

Élément	Formule / repère
Alignement	O, A, A' alignés
Distance au centre	$OA' = \|k\| \times OA$
Rapport	$k=\frac{OA'}{OA}$ si A et A' sont du même côté de O ; signe négatif sinon
Agrandissement	$k\>;1$
Réduction	$0\<;k\<;1$
Cas particulier	$k=1$: figure inchangée ; $k=0$: tout va en O ; $k\<;0$: image de l’autre côté

Pour reconnaître vite une homothétie sur une figure, prends un point et son image, puis regarde deux choses. D’abord l’alignement. Ensuite la proportion des distances au centre. Si plusieurs couples de points vérifient ces deux tests avec le même k, tu tiens le bon réflexe. C’est le premier repère visuel utile au Brevet. En revanche, si les points ne sont pas alignés avec le centre, ce n'est pas une homothétie, même si la figure "semble" plus grande.

À retenir : en homothétie, on garde la forme, les angles et le parallélisme ; les longueurs sont multipliées par $|k|$, et le signe de k indique de quel côté du centre se place l'image.

Si $OA = 4$ cm et $k = -2$, alors $OA' = 8$ cm et A' est sur la droite (OA), de l'autre côté de O.

⚠ Erreur fréquente : confondre k et $|k|$. La distance utilise $|k|$, mais la position de l'image dépend du signe de k.

Construire une homothétie et la reconnaître d'un coup d'œil sur une figure

Pour **construire l'image d'un point** par homothétie, on trace la droite passant par le **centre** O et le point de départ A, puis on place A' à une distance $OA' = |k| \times OA$. Si $k\>0$, A' reste du même côté de O que A ; si $k\<0$, il passe de l'autre côté. C'est la base de toute **méthode homothétie**.

La construction de l'homothétique d'un point repose sur une règle unique : les points O, A et A' sont alignés, et la longueur orientée vérifie $OA' = k \times OA$. En pratique, pour **faire une homothétie de rapport 2**, on double la distance au centre ; pour une **homothétie rapport 0,6**, on la réduit à $0{,}6$ fois. Si $k = 1$, rien ne change ; si $k = 0$, toute la figure se réduit au centre ; le **point invariant** est toujours le centre O. Un **segment** devient un segment parallèle, un **triangle** devient un triangle semblable, un **rectangle** reste un rectangle, car les angles sont conservés tandis que les longueurs sont multipliées par $|k|$.

Pour savoir **comment construire une homothétie** sur une figure complète, on commence par quelques points bien choisis. Pour un segment $[AB]$, on construit A' et B', puis on relie : $[A'B']$ est l'image de $[AB]$ et sa longueur vaut $A'B' = |k| \times AB$. Pour un triangle ABC, même logique : on construit A', B', C', puis on relie les sommets homologues. Pour un rectangle, la méthode reste identique ; comme le parallélisme et les angles droits sont conservés, l’image est encore un rectangle. En *géométrie vectorielle*, cela revient à écrire $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, ce qui éclaire le rôle du signe sans entrer dans des outils plus avancés.

Schéma : Centre O, point A et son image A' alignés sur une même droite ; exemple avec k positif du même côté de O, et avec k négatif de l'autre côté ; un triangle ABC et son image A'B'C' avec côtés homologues parallèles.

Pour **reconnaître une homothétie** sur une figure déjà dessinée, inutile de tout recalculer. Trois indices visuels suffisent souvent. D’abord, chaque point et son image sont alignés avec le même centre O : O, A, A' sur une droite, puis O, B, B' sur une autre. Ensuite, les côtés homologues sont parallèles, par exemple $(AB) \parallel (A'B')$. Enfin, les rapports de longueurs sont constants : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OC'}{OC} = |k|$. Si ces trois signes apparaissent ensemble, la lecture est presque immédiate. En revanche, une seule condition ne suffit pas : deux segments parallèles ne prouvent pas, à eux seuls, une homothétie.

Objet	Propriété / formule
Point A	O, A, A' alignés et $OA' = \lvert k\rvert \times OA$
Signe de k	$k\>0$: même côté ; $k\<0$: côté opposé
Longueurs	Multipliées par $\lvert k\rvert$
Angles	Conservés
Centre	O est invariant

À retenir : si le signe de k change, la taille dépend de $|k|$, mais la position bascule par rapport au centre.

Avec $k = -2$, l’image est *deux fois plus loin* du centre, mais de l’autre côté.

⚠ Oublier le signe de k, confondre distance et longueur orientée, croire qu’un rapport négatif “réduit forcément”, ou oublier que le centre reste invariant sont les erreurs les plus fréquentes.

Rapport d'une homothétie — KhanAcademyFrancophone

Les 4 erreurs qui font perdre des points au Brevet

Les fautes les plus fréquentes en homothétie sont toujours les mêmes : placer l’image du **mauvais côté du centre** quand $k<0$, multiplier une aire par k au lieu de k^2, oublier que O, M et M' sont **alignés**, et croire que $0<k<1$ “agrandit un peu”. Faux. Avec un correctif simple, ces pièges disparaissent vite.

Premier piège : si $k<0$, l’image M' se place de l’autre côté de O, pas sur la même demi-droite que M. Pense : *signe négatif = inversion par rapport au centre*. Deuxième erreur : les longueurs sont multipliées par $|k|$, mais les aires par k^2. Si $k=3$, une longueur est triplée, alors qu’une aire est multipliée par 9. Troisième oubli : en homothétie de centre O, les points O, M et M' restent sur une même droite. Si l’alignement manque, la figure est fausse. Enfin, quand $0<k<1$, il ne s’agit pas d’un agrandissement discret, mais d’une **réduction** : l’image se rapproche de O. Mini-réflexe efficace : vérifier le signe de k, puis la droite, puis la distance.

Propriétés de l’homothétie : ce qui est conservé, ce qui change et le lien utile avec Thalès

Une **homothétie** conserve l’**alignement**, le **parallélisme**, les **angles** et donc la forme générale d’une figure. En revanche, les **longueurs** et les **périmètres** sont multipliés par $|k|$, tandis que les **aires** sont multipliées par k^2. C’est précisément ce qui relie l’homothétie au **théorème de Thalès**, dès qu’apparaissent des droites parallèles et des rapports de longueurs.

Les **propriétés de l’homothétie** se lisent très vite si l’on sépare ce qui reste identique de ce qui change d’échelle. Si des points étaient alignés avant, ils le restent après. Si deux droites étaient parallèles, elles le restent aussi. Les **angles** ne changent pas, ce qui explique que l’image d’un triangle soit un triangle de même forme, simplement agrandi ou réduit. En revanche, toute **longueur** est multipliée par $|k|$; par conséquent, un périmètre aussi est multiplié par $|k|$. Pour les **aires**, le facteur devient k^2, donc toujours positif. Le signe de k change seulement le sens global : si $k>0$, l’image est du même côté du centre ; si $k\<0$, elle passe de l’autre côté. C’est une lecture concrète du *rapport de similitude*, très utile en exercice.

Grandeur ou propriété	Effet d’une homothétie de rapport k
Alignement	Conservé
Parallélisme	Conservé
Angles	Conservés
Longueurs	Multipliées par $\lvert k\rvert$
Périmètres	Multipliés par $\lvert k\rvert$
Aires	Multipliées par k^2
Sens global	Même côté si $k\>0$, côté opposé si $k\<0$

Le lien avec le **théorème de Thalès** devient clair dès qu’une figure contient des droites parallèles. Quand une droite coupe deux côtés d’un triangle et forme un segment parallèle au troisième, on observe des rapports égaux entre les **longueurs**. Géométriquement, cela revient souvent à dire qu’un petit triangle est l’image du grand par une homothétie de centre un sommet et de rapport k . Ainsi, au lieu d’apprendre des égalités de rapports de façon isolée, on comprend qu’il s’agit d’une même figure vue à une autre échelle. Cette lecture est plus simple, plus visuelle et, néanmoins, très solide pour résoudre un exercice de 3e.

À retenir : si la forme est la même et que les côtés correspondants sont proportionnels, pense *homothétie* ; si des parallèles créent des rapports égaux, pense **Thalès**.

Si $k=3$, une longueur de 4 cm devient 12 cm, un périmètre de 10 cm devient 30 cm et une aire de 5 cm ^{2} devient 45 cm ^{2} .

En encadré mental utile pour le Brevet, retiens aussi trois idées souvent croisées ailleurs. D’abord, l’homothétie fait partie des *propriétés affines* au sens où elle conserve l’alignement et le parallélisme. Ensuite, la **composition** de deux homothéties de même centre revient à multiplier les rapports, par exemple $k_1 \times k_2$. Enfin, le **rapport de similitude** n’est rien d’autre que le facteur d’agrandissement ou de réduction. Ce vocabulaire paraît plus technique, mais il sert surtout à mieux lire les figures.

⚠ Ne confonds pas k et $|k|$: les **longueurs** et les **périmètres** utilisent $|k|$, jamais une valeur négative, alors que le signe de k indique seulement de quel côté du centre se place l’image. Pour les **aires**, c’est k^2, donc toujours positif.

Exercices d’homothétie corrigés pas à pas : mini-problèmes de 3e et réflexes pour le Brevet

Pour réussir un **homothétie exercice**, repère d’abord le **centre**, lis correctement le rapport k, puis vérifie si l’image reste du même côté ou passe de l’autre. Ensuite seulement, applique la règle juste : longueurs et périmètres sont multipliés par $|k|$, les aires par k^2. Un *exercice corrigé* détaillé évite les erreurs de signe, très fréquentes au **Brevet**.

Dans une figure d’homothétie de centre O, les points correspondants sont alignés avec O et les longueurs vérifient $OA' = |k| \times OA$. Si $k>0$, l’image est du *même côté* de O ; si $k<0$, elle change de côté. Les angles sont conservés, les droites restent parallèles si elles ne passent pas par O, et une **démonstration** repose souvent sur l’alignement, le parallélisme et la proportionnalité. En **homothétie cours**, le réflexe utile est simple : identifier ce qui est demandé — “calculer le rapport”, “construire l’image”, “démontrer qu’il s’agit d’une homothétie”, “comprendre le signe de k” — puis choisir la bonne relation.

Situation	Relation
Longueur	$A'B' = \lvert k\rvert \times AB$
Périmètre	$P' = \lvert k\rvert \times P$
Aire	$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A}$
Rapport	$k = \frac{OA'}{OA}$ avec le bon signe

Mini-problème 1, niveau **activité homothétie 3ème** : sur une figure, $OA = 4$ cm et $OA' = 10$ cm, avec A et A' du même côté de O. Alors $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Si, en revanche, A' est de l’autre côté, la **justification** correcte devient $k = -2{,}5$. Mini-problème 2 : construire l’image de B par l’homothétie de centre O et de rapport $k = 2$. On trace la demi-droite

(OB), puis on place B' tel que $OB' = 2 \times OB$. Avec $k = 0{,}6$, même méthode, mais l’image se rapproche de O : $OB' = 0{,}6 \times OB$. Cette lecture visuelle distingue agrandissement et réduction sans calcul long.

Schéma : Point O centre de l’homothétie, point B sur une demi-droite issue de O, image B' placée plus loin pour k=2 et plus près pour k=0,6 ; second cas avec image de l’autre côté de O pour un rapport négatif.

Mini-problème 3 : dans les triangles OAB et $OA'B'$, on sait que O, A, A' sont alignés, que O, B, B' sont alignés, et que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 3$. On en déduit une homothétie de centre O et de rapport 3 ; par conséquent, $(AB) \parallel (A'B')$. Voilà le lien classique entre **homothétie exercices** et Thalès. Cas type **brevet homothétie** : un logo triangulaire est agrandi à l’**échelle** $1{,}5$. Si un côté mesure 8 cm, l’image mesure 12 cm ; si l’aire initiale vaut 20 cm ^{2}, l’aire agrandie vaut $20 \times 1{,}5^2 = 45$ cm ^{2}. La relecture finale tient en quatre questions : centre trouvé ? signe de k cohérent ? formule adaptée ? unité correcte dans la copie ?

À retenir : pour une construction, on pense alignement avec le centre ; pour un calcul, on pense $|k|$ sur les longueurs et k^2 sur les aires.

Exemple minute : si $k = -2$ et $OC = 3$ cm, alors $OC' = 6$ cm, mais *de l’autre côté* de O.

⚠ Confondre k et $|k|$ fausse tout : une longueur n’est jamais négative, mais le signe de k change la position de l’image sur la figure.

Un exercice type Brevet entièrement décrypté

On considère un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par une homothétie de centre O. Sur la figure, les points A, O, A' sont alignés, de même pour B, O, B' et C, O, C'. Si $OA = 2$ cm et $OA' = 5$ cm, alors le rapport vaut $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{5}{2}$. Comme A et A' sont de part et d’autre de O, le signe est **négatif** : $k = -\frac{5}{2}$. On en déduit aussitôt les longueurs images : si $AB = 3$ cm, alors $A'B' = |k| \times AB = \frac{5}{2} \times 3 = 7{,}5$ cm. Même logique pour toutes les autres longueurs. L’angle, lui, est conservé.

La rédaction attendue au Brevet doit rester nette. On écrit : *“Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O, donc O est le centre de l’homothétie. Le rapport est $k = -\frac{5}{2}$ car $\frac{OA'}{OA} = \frac{5}{2}$ et les points correspondants sont situés de part et d’autre de O. Par conséquent, les longueurs sont multipliées par $|k| = \frac{5}{2}$. Ainsi, $A'B' = 7{,}5$ cm. La transformation est donc une homothétie de centre O et de rapport $-\frac{5}{2}$.”* **Centre**, **rapport**, **signe**, puis conclusion : l’ordre ne change pas.

Quel est le rapport de l'homothétie ?

Le rapport de l'homothétie est le nombre, noté souvent k, qui indique comment une figure est agrandie ou réduite à partir d'un centre. Si k > 1, la figure s'agrandit. Si 0 < k < 1, elle se réduit. Si k < 0, il y a aussi un renversement par rapport au centre.

Comment faire une homothétie de rapport 2 ?

Pour réaliser une homothétie de rapport 2, je pars d'un centre O. Pour chaque point A de la figure, je trace la droite OA puis je place le point A' sur cette droite de sorte que OA' = 2 × OA. Tous les points images se trouvent dans le même sens que les points d'origine car le rapport est positif.

Comment calculer le rapport de l'homothétie ?

Je calcule le rapport en comparant une longueur image à la longueur d'origine correspondante. On utilise k = OA' / OA si O est le centre, ou encore k = A'B' / AB pour deux segments homologues. Il faut conserver le signe selon la position des points par rapport au centre pour distinguer rapport positif et négatif.

Quel est le principe de l'homothétie ?

Le principe de l'homothétie est de transformer une figure à partir d'un centre fixe en multipliant toutes les distances à ce centre par un même nombre. La forme est conservée, les angles restent identiques, et les longueurs sont toutes multipliées par le même rapport. C'est donc une transformation d'agrandissement ou de réduction.

Comment démontrer une homothétie ?

Pour démontrer qu'il s'agit d'une homothétie, je vérifie d'abord qu'il existe un centre O commun tel que les points correspondants soient alignés avec O. Ensuite, je montre que les rapports OA' / OA sont égaux pour plusieurs points. Si ces conditions sont respectées, la transformation est bien une homothétie de centre O et de rapport k.

Comment construire une homothétie ?

Je commence par connaître le centre O et le rapport k. Pour chaque point de la figure, je trace la droite passant par O et ce point. Je place ensuite l'image à une distance multipliée par k. Si k est positif, l'image reste du même côté du centre. Si k est négatif, elle se place de l'autre côté.

Comment comprendre l'homothétie ?

Pour comprendre l'homothétie, il faut l'imaginer comme un zoom centré sur un point fixe. Toutes les longueurs changent dans la même proportion, mais la figure garde sa forme générale. Les droites restent des droites, les angles ne changent pas, et les côtés homologues deviennent proportionnels. C'est une transformation très utile en géométrie plane.

Comment faire une homothétie de rapport 0 6 ?

Pour une homothétie de rapport 0,6, je pars du centre O et je trace la droite vers chaque point de la figure. Je place ensuite l'image à 0,6 fois la distance d'origine au centre. La figure obtenue est une réduction, car le rapport est compris entre 0 et 1, tout en gardant la même forme.

Pour bien maîtriser l’homothétie, retenez une idée centrale : centre, alignement et rapport k guident presque tout. Si vous savez reconnaître rapidement une figure homothétique et éviter les erreurs sur le signe de k, vous gagnez beaucoup de points en exercice comme au Brevet. Le plus efficace reste de s’entraîner sur de petites constructions et des problèmes corrigés pas à pas, jusqu’à ce que les repères visuels deviennent automatiques.

Mis à jour le 05 mai 2026