Maths collège

Homothétie définition : comprendre vite et sans se tromper

Homothétie définition : centre, rapport, signe de k, exemples et pièges fréquents pour réussir en géométrie au collège.

Cours de mathématiques niveau

Une homothétie est une transformation géométrique qui agrandit ou réduit une figure à partir d'un centre O selon un rapport k. Les points image restent alignés avec O, et toutes les longueurs sont multipliées par la valeur absolue de k.

Pourquoi une figure semble-t-elle parfois simplement plus grande, plus petite… ou carrément "retournée" par rapport à un point ? C'est exactement là que l'homothétie entre en jeu. En 3ème, beaucoup d'élèves comprennent l'idée d'agrandir ou de réduire, mais hésitent dès que le rapport devient négatif ou qu'il faut retrouver le centre. Si vous aidez un enfant à faire ses devoirs, le plus utile est d'avoir une définition simple, puis une méthode visuelle pour reconnaître rapidement les bons indices sur une figure sans tomber dans les confusions classiques.

En bref : les réponses rapides

Comment savoir rapidement si deux figures sont homothétiques ? — Il faut vérifier l'alignement des points homologues avec un même centre et constater que toutes les distances au centre sont multipliées par un même rapport.

Quelle différence entre une homothétie et une symétrie centrale ? — La symétrie centrale est un cas particulier d'homothétie de centre O et de rapport -1. Elle conserve la taille, alors qu'une homothétie peut aussi agrandir ou réduire.

Pourquoi utilise-t-on |k| pour les longueurs mais k² pour les aires ? — Une longueur ne peut pas être négative, donc on prend la valeur absolue du rapport. Une aire dépend de deux dimensions, elle est donc multipliée par le carré du coefficient.

Peut-on avoir une homothétie de rapport 0 ? — Dans certains cadres mathématiques, oui : toute la figure est envoyée sur le centre. Au collège, ce cas est souvent présenté comme un cas limite plutôt que comme un outil de construction courant.

Homothétie : définition simple, principe et éléments à connaître

Une **homothétie** est une transformation géométrique qui agrandit ou réduit une **figure** à partir d'un point fixe, appelé **centre d'homothétie** O, selon un nombre k, appelé **rapport d'homothétie**. L'image d'un point M est un point M' aligné avec O, et les distances à partir de O sont multipliées par $|k|$. C'est la base de la **homothétie définition** en collège.

En **homothétie mathématiques**, on transforme chaque point d'une figure en conservant une règle simple : le point de départ M, le centre O et son image M' sont sur une même droite, et l'on a $OM' = |k| \times OM$. Le signe de k change le sens. Si $k>1$, on obtient un agrandissement ; si $0<k<1$, une réduction ; si $k<0$, la figure image se place de l'autre côté de O, ce qui piège souvent en **homothétie 3ème**. Si $k=1$, rien ne change ; si $k=0$, toute la figure se réduit au seul point O.

Le **principe de l'homothétie** repose donc sur deux idées : alignement et proportion. Une droite reste une droite, un segment devient un segment parallèle au premier s'il ne passe pas par O, et toutes les longueurs sont multipliées par $|k|$. En revanche, les angles sont conservés, ce qui permet de reconnaître des figures semblables. Le mot existe aussi dans des dictionnaires comme le **Larousse**, avec un sens général voisin d'agrandissement proportionnel ; néanmoins, en géométrie, le terme a un cadre précis. Le sujet appartient à la **géométrie affine** et à la **géométrie euclidienne**, mais au collège on retient surtout la méthode sur les points et les longueurs.

Schéma : Point O centre d’homothétie, point M sur une demi-droite issue de O, point M' plus loin sur la même droite pour un rapport positif supérieur à 1, puis un second exemple avec M' de l’autre côté de O pour un rapport négatif.

Exemple 1 : on prend un point M tel que $OM = 3$ cm et un rapport $k = 2$. Comme $k>1$, c’est un agrandissement. On place donc M' sur la demi-droite $[OM)$, puis on calcule $OM' = 2 \times 3 = 6$ cm. Exemple 2 : si $OM = 4$ cm et $k = -\frac{1}{2}$, alors la longueur devient $OM' = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ cm, mais M' se situe de l’autre côté de O. Voilà le point délicat : la distance utilise $|k|$, tandis que le signe de k indique le côté.

Pour une figure simple, par exemple un triangle ABC, l’image par l’homothétie de centre O et de rapport k est le triangle $A'B'C'$. On construit d’abord A', B', C' en traçant les droites (OA), (OB), (OC), puis en appliquant la même règle de distance. Si $k = \frac{3}{2}$, chaque distance au centre est multipliée par $\frac{3}{2}$; si $k = \frac{1}{3}$, la figure se resserre vers O. Cette lecture rapide aide à reconnaître une homothétie sur une figure sans confondre réduction et déplacement.

Exercice 1 : $OM = 5$ cm, $k = 3$. Corrigé : $OM' = 15$ cm, M' est sur la même demi-droite que M. Exercice 2 : $OM = 8$ cm, $k = \frac{1}{4}$. Corrigé : $OM' = 2$ cm, c’est une réduction. Exercice 3 : $OM = 6$ cm, $k = -2$. Corrigé : $OM' = 12$ cm, mais M' est de l’autre côté de O. Exercice 4 : on observe deux points alignés avec O, avec $OM' = \frac{1}{2}OM$. Corrigé : le rapport vaut $k = \frac{1}{2}$ si M' est du même côté que M, et $k = -\frac{1}{2}$ sinon.

À retenir

À retenir : une **homothétie** transforme une figure à partir d’un **centre d’homothétie** O et d’un **rapport d’homothétie** k. Les points correspondants sont alignés avec O, les longueurs sont multipliées par $|k|$, et le signe de k fixe le côté où se trouve l’image. C’est la clé pour comprendre vite la **homothétie définition** et éviter les erreurs classiques.

Centre O et rapport k : les 2 éléments caractéristiques d'une homothétie

Une homothétie est entièrement déterminée par **deux éléments** : le **centre** O et le **rapport** k. Le centre O reste fixe, et pour tout point A, son image A' est alignée avec O sur la droite (OA). Le rapport commande tout : la distance vérifie $OA' = |k| \times OA$, tandis que le signe de k fixe le côté où se place l'image.

Si $k>0$, alors A' est du *même côté* que A par rapport à O ; si $0<k<1$, la figure rétrécit, et si $k>1$, elle s'agrandit. Si $k<0$, l'image passe de l'autre côté de O : c'est le cas qui piège le plus souvent. Par exemple, $k=-2$ double les longueurs, mais inverse la position par rapport au centre. Cas particuliers : $k=1$ redonne la même figure, donc chaque point garde sa place ; $k=-1$ correspond à une symétrie centrale de centre O ; $k=0$ envoie tous les points sur O, ce cas est souvent cité avec prudence car il écrase toute la figure en un seul point.

Homothétie : qu'est ce que c'est ? Leçon 3ème — monProfDeMaths

Comment reconnaître ou construire une homothétie sur une figure

Pour reconnaître une **homothétie**, on teste deux idées simples : les **points homologues** et le **centre d'homothétie** doivent être alignés, puis toutes les distances au centre doivent être multipliées par un même **rapport** k. Si $k>0$, l'image reste du même côté du centre ; si $k<0$, elle passe de l'autre côté.

Une homothétie de centre O et de rapport k transforme un point A en un point A' tel que O, A et A' soient sur la même **droite**, et que $OA' = |k| \times OA$. Le signe de k précise la position : pour $k>0$, A' est sur la demi-droite $[OA)$; pour une **homothétie rapport négatif**, A' est sur la demi-droite opposée. Si $k=2$, on obtient une image deux fois plus loin du centre ; si $k=\frac{1}{2}$, elle est deux fois plus proche. Le cas $k=0$ envoie toute la figure sur le seul point O : c'est un cas limite, utile pour éviter une confusion fréquente quand on parle d'**homothétie calcul**.

Pour le diagnostic rapide, on relie chaque point à son image : si les droites (AA'), (BB'), (CC') se coupent en un même point O, ce point est un bon candidat pour **trouver le centre d'homothétie**. Ensuite, on vérifie le même quotient de longueurs : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$. Ce test répond à la question *comment calculer l'homothétie* : on estime le **homothétie rapport** en divisant une distance image par la distance originale. Les segments homologues restent parallèles, les longueurs sont multipliées par $|k|$, et l'alignement est conservé. En ouverture culturelle seulement, cette idée se retrouve aussi dans le **plan complexe**, où une homothétie s'écrit par une multiplication autour d'un centre.

Exemple 1. On connaît O et $k=2$. Pour **comment faire une homothétie de rapport 2**, on trace la droite (OA), puis on place A' sur la demi-droite $[OA)$ avec $OA' = 2 \times OA$. Même méthode pour B et C. On obtient l'image du triangle en reliant A', B' et C'. Exemple 2. On connaît O et $k = -\frac{3}{2}$. On trace encore (OA), mais cette fois A' se place de l'autre côté de O, avec $OA' = \frac{3}{2} OA$. Le signe change la position, pas la règle de distance.

Schéma : Point O centre d'homothétie, point A et son image A' alignés avec O ; un second schéma montre A' du même côté pour k positif et de l'autre côté pour k négatif ; triangle ABC et son image A'B'C'.

Exercice 1 : $OA=3$ cm et $k=2$. Corrigé : $OA'=6$ cm, sur $[OA)$. Exercice 2 : $OA=4$ cm et $k=-\frac{1}{2}$. Corrigé : $OA'=2$ cm, de l'autre côté de O. Exercice 3 : on mesure $OA=5$ cm et $OA'=10$ cm. Corrigé : le **rapport** vaut $k=2$ si A' est du même côté, ou $k=-2$ sinon. Exercice 4 : pour deux triangles supposés homothétiques, on prolonge (AA') et (BB') ; leur intersection donne le centre, puis on vérifie sur un troisième couple. Exercice 5 : si les droites reliant les points homologues ne sont pas concourantes, il n'y a pas d'homothétie. C'est le test inverse le plus rapide pour un **homothétie calcul** fiable.

À retenir

À retenir : reconnaître une homothétie, c'est vérifier **alignement** et **même quotient**. Construire une image, c'est partir du centre, tracer la droite, puis placer le point à la bonne distance selon k. Pour **trouver le centre d'homothétie**, on prolonge les droites joignant les points homologues. Le piège classique reste le signe : $k>0$ même côté, $k<0$ côté opposé.

Méthode express pour retrouver le centre et le rapport à partir de deux figures

Pour **retrouver le centre** d'une homothétie, relie deux paires de points homologues, par exemple A avec A' puis B avec B'. Si c'est bien une homothétie, les droites (AA') et (BB') se coupent en un même point : **le centre** O. Ensuite, vérifie l'alignement de chaque paire avec O. Puis calcule le **rapport** avec $k = \frac{OA'}{OA}$ en longueurs orientées ; au collège, on lit souvent seulement la valeur numérique et on déduit le signe par la position des points.

Astuce simple : si A' et A sont du **même côté** de O, alors $k > 0$; s'ils sont de part et d'autre, alors $k < 0$. Si $OA' = 2 \times OA$, alors $k = 2$; si $OA' = \frac{1}{2}OA$, alors $k = \frac{1}{2}$. En revanche, si les droites (AA') et (BB') sont parallèles ou ne se rencontrent pas au même point, ce n'est *pas* une homothétie. Cette méthode évite le piège classique du signe. Elle marche vite, même sur une figure piégeuse.

Propriétés de l'homothétie : longueurs, aires, volumes, parallélisme et lien avec Thalès

Dans une **homothétie** de rapport k, les **longueurs** sont multipliées par $|k|$, les **aires** par k^2 et les **volumes** par $|k|^3$. Les droites restent des droites, l'alignement et le **parallélisme** sont conservés, et le **théorème de Thalès** sert souvent à justifier les rapports sur des triangles emboîtés.

En **homothétie mathématiques**, une figure est agrandie ou réduite depuis un centre O. Si un point A devient A', alors O, A et A' restent alignés, et la distance au centre est multipliée par le rapport. Le signe compte : avec $k>0$, l'image est du *même côté* de O ; avec $k<0$, elle passe de l'autre côté. Voilà pourquoi, dans les **homothétie propriétés**, on distingue la position et la taille. Une longueur ne peut pas être négative, donc on multiplie par $|k|$. En revanche, une aire dépend de deux dimensions, donc elle est multipliée par k^2, toujours positif.

Ce point résume l'essentiel du **homothétie cours**. Une droite reste une droite ; si elle passe par le centre, son image est elle-même, sinon son image est une droite parallèle. L'alignement est conservé, donc des points alignés le restent après transformation. Les longueurs, donc aussi les périmètres, sont multipliés par $|k|$; les **longueurs aires volumes** suivent la règle classique :

$$\text{longueurs} \times |k|, \quad \text{aires} \times k^2, \quad \text{volumes} \times |k|^3.$$

Dans une configuration de triangles emboîtés, le **Théorème de Thalès** permet souvent d'écrire $\frac{OA'}{OA}=k$ ou $\frac{A'B'}{AB}=|k|$, à condition d'avoir les bons parallèles. Ouverture utile : la **symétrie centrale** est une homothétie de rapport -1, et la **composition** de deux homothéties de même centre a pour rapport le produit des rapports.

Grandeur	Effet d'une homothétie de rapport k
Longueur	$L' = |k|L$
Périmètre	$P' = |k|P$
Aire	$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A}$
Volume	$V' = |k|^3V$
Droites	droites conservées, parallélisme conservé

Exemple 1. Un triangle a des côtés 4, 5 et 7 cm. On applique une homothétie de rapport $k=-2$. Étape 1 : chaque longueur est multipliée par $|k|=2$. Les nouveaux côtés valent donc 8,

10 et 14 cm. Étape 2 : si l’aire initiale vaut 6 cm^2, l’aire image vaut $(-2)^2 \times 6 = 24\text{ cm}^2$. Le signe négatif ne change pas les mesures ; il change seulement la position par rapport au centre.

Exemple 2. Dans deux triangles emboîtés de centre O, on sait que $(BC) \parallel (B'C')$, $OA = 3$ cm et $OA' = 4{,}5$ cm. Étape 1 : par le **théorème de Thalès**, $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Étape 2 : $k = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$. Étape 3 : si $AB = 6$ cm, alors $A'B' = 1{,}5 \times 6 = 9$ cm. La présence des parallèles permet ici de reconnaître l’homothétie sans hésiter.

Exercice 1. Avec $k = \frac{1}{2}$, une longueur de 10 cm devient combien ? Corrigé : $10 \times |\frac{1}{2}| = 5$ cm.

Exercice 2. Une surface de 12 cm^2 subit une homothétie de rapport -3. Corrigé : $12 \times (-3)^2 = 108\text{ cm}^2$.

Exercice 3. Un cube de volume 8 cm^3 est transformé avec $k = 2$. Corrigé : $8 \times |2|^3 = 64\text{ cm}^3$.

Exercice 4. Deux droites parallèles avant transformation le restent-elles ? Corrigé : oui, le **parallélisme** est conservé par toute homothétie.

À retenir

À retenir : en homothétie, on garde la forme et les directions essentielles. Les longueurs et périmètres sont multipliés par $|k|$, les aires par k^2, les volumes par $|k|^3$. Le signe de k agit sur la position, pas sur la mesure. Avec des triangles et des parallèles, pensez aussitôt au **théorème de Thalès**.

Erreurs fréquentes et exercices corrigés originaux sur l’homothétie

Les **erreurs homothétie** les plus fréquentes sont simples à repérer : on confond le signe de k, on oublie que l’image, l’original et le **centre** doivent être alignés, et on multiplie les longueurs par k au lieu de $\lvert k \rvert$. En **homothétie 3ème**, quelques cas pièges suffisent pourtant à corriger ces réflexes avant la **révision brevet**.

Une homothétie de centre O et de rapport k transforme tout point A en un point A' tel que O, A et A' soient alignés, avec $OA'=\lvert k \rvert \times OA$. Si $k>0$, A' est du même côté que A par rapport à O ; si $k<0$, il est de l'autre côté. Pour les longueurs, on multiplie par $\lvert k \rvert$; pour les aires, par k^2. Une **figure homothétique** garde sa forme, pas sa taille.

Symptôme	Erreur typique	Correction
On parle d'agrandissement avec $k=\frac{1}{2}$	Confusion agrandissement/ réduction	Si $0<\lvert k \rvert<1$, c'est une réduction ; si $\lvert k \rvert>1$, un agrandissement.
Les points ne sont pas sur une même droite issue de O	Oubli du **centre**	Vérifier l'alignement O, A, A' pour plusieurs sommets.
On place l'image du mauvais côté	Mauvaise lecture d'un **rapport négatif**	Si $k<0$, l'image est de l'autre côté du centre, comme dans une **symétrie centrale** si $k=-1$.
On écrit aire $\times k$	Erreur sur aires et longueurs	Longueurs $\times \lvert k \rvert$, aires $\times k^2$.
La figure "a juste glissé"	Confusion avec **translation** ou symétrie	Une translation conserve direction et distance ; une homothétie dépend d'un centre unique.

Diagnostic rapide : si deux figures ont des côtés proportionnels et que les droites joignant les sommets correspondants passent toutes par un même point, alors on suspecte une homothétie. En revanche, si les segments reliant les sommets restent parallèles, on pense plutôt à une **translation**. Le cas $k=-1$ mérite une vigilance particulière : c'est à la fois une homothétie et une **symétrie centrale**. Le cas $k=0$, selon les conventions scolaires, envoie toute figure sur le point O ; c'est un *cas limite*, utile pour raisonner mais rarement demandé comme transformation usuelle au brevet.

Exemple 1. On a $OA=4$ cm et $k=-\frac{3}{2}$. Alors $OA'=\lvert -\frac{3}{2}\rvert \times 4=6$ cm. Le signe négatif impose de placer A' de l'autre côté de O. Voilà le cœur du thème **homothétie rapport négatif** : la distance devient positive, mais la position change de côté. **Exemple 2.** Deux triangles semblent semblables. On trace les droites reliant chaque sommet à son correspondant : elles ne se coupent pas en un même point. Conclusion : elles se ressemblent, mais ne sont pas homothétiques. C'est un piège classique des **homothétie exercices**.

Exercice 1. Avec $k=-2$, l'image d'un segment de 3 cm mesure 6 cm, pas -6 cm. **Exercice 2.** Avec $k=0$, tout point devient O ; l'image d'un triangle est donc réduite au centre. **Exercice 3.** Pour rechercher le centre, on relie A à A' puis B à B' : leur intersection donne O, si elle est la même avec un troisième couple. **Exercice 4.** Deux rectangles de dimensions 4×6 et 6×9 sont proportionnels, car $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$; ils peuvent être homothétiques si un même centre existe. En revanche, 4×6 et 6×8 ne le sont pas, car $\frac{6}{4}\neq\frac{8}{6}$.

À retenir

Pour la **révision brevet**, retiens ceci : vérifier le **centre**, lire le signe de k, multiplier les longueurs par $\lvert k \rvert$ et les aires par k^2, puis écarter les faux amis comme la **translation**. Si $k<0$, l'image change de côté ; si $k=-1$, on retrouve une symétrie centrale ; si aucun centre commun n'apparaît, il n'y a pas d'homothétie.

Cas pièges à connaître : $k<0$, $k=0$ et figures qui semblent homothétiques mais ne le sont pas

Les cas difficiles sont **moins mystérieux** qu'ils n'en ont l'air. Si le rapport vaut $k<0$, l'image d'un point se place sur la droite passant par le centre, mais *de l'autre côté* : le centre est alors entre le point et son image. Si $k=-2$, par exemple, la distance au centre est doublée et le sens est inversé. Quand $k=0$, tous les points ont la même image : le centre lui-même. C'est un cas limite, correct en théorie, mais peu utilisé au collège, car la figure “s'écrase” en un seul point.

Pour montrer qu’une figure **n’est pas** l’image d’une autre par homothétie, il faut chercher une contradiction simple. D’abord, les points correspondants doivent être alignés avec un même centre. Ensuite, les longueurs doivent être multipliées par un *même* nombre k. Si un segment semble doublé mais qu’un autre est triplé, ce n’est pas une homothétie. Même verdict si les droites correspondantes ne passent pas toutes par un centre commun, ou si l’ordre des points contredit le signe attendu de k.

homothétie définition

L’homothétie est une transformation géométrique qui agrandit ou réduit une figure à partir d’un point fixe appelé centre. Toutes les distances au centre sont multipliées par un même nombre, appelé rapport. La figure obtenue conserve la forme et les angles, mais sa taille change selon la valeur du rapport.

homothétie définition larousse

Dans un sens proche des dictionnaires comme le Larousse, l’homothétie désigne une transformation qui fait correspondre à chaque point d’une figure un autre point aligné avec un centre fixe, selon un rapport constant. En clair, c’est une opération d’agrandissement ou de réduction qui respecte les proportions de la figure initiale.

homothétie définition algèbre

En algèbre ou en géométrie analytique, l’homothétie se traduit par une multiplication des coordonnées par un coefficient, éventuellement autour d’un centre donné. Si le centre est l’origine, un point M(x, y) devient M’(kx, ky). Le coefficient k est le rapport : il détermine l’agrandissement, la réduction ou le retournement si k est négatif.

homothétie définition littéraire

Le mot homothétie appartient d’abord au vocabulaire mathématique. En usage littéraire ou figuré, il peut évoquer une correspondance de forme, une reproduction à échelle différente ou une analogie structurée entre deux ensembles. Ce n’est pas une définition technique autonome en littérature, mais plutôt un emploi métaphorique de l’idée de proportion.

Comment calculer l'homothétie ?

Pour calculer une homothétie, je repère d’abord le centre et le rapport k. Ensuite, je multiplie la distance de chaque point au centre par k. En coordonnées, si le centre est l’origine, on multiplie simplement les coordonnées par k. Si k est supérieur à 1, on agrandit ; entre 0 et 1, on réduit ; s’il est négatif, on inverse aussi le sens.

Comment faire une homothétie de rapport 2 ?

Pour une homothétie de rapport 2, je pars du centre choisi et je place chaque image de point sur la même droite que le centre et le point d'origine. La nouvelle distance au centre doit être exactement deux fois plus grande. La figure finale garde la même forme, mais toutes les longueurs sont doublées.

Quel est le principe de l'homothétie ?

Le principe de l'homothétie est de transformer une figure en conservant ses proportions. Chaque point se déplace sur une droite passant par un centre fixe, et sa distance au centre est multipliée par un même rapport. Les angles restent identiques, les côtés correspondants restent parallèles, et seule l'échelle de la figure change.

Quels sont les 2 éléments caractéristiques d'une homothétie ?

Les deux éléments caractéristiques d'une homothétie sont le centre et le rapport. Le centre est le point fixe à partir duquel la transformation s'effectue. Le rapport est le nombre qui indique si la figure est agrandie, réduite ou inversée. Avec ces deux informations, je peux construire toute l'image d'une figure.

Retenez l'essentiel : une homothétie dépend toujours d'un centre O et d'un rapport k. Si k est positif, l'image reste du même côté du centre ; si k est négatif, elle passe de l'autre côté ; et les longueurs sont multipliées par |k|. Pour progresser vite, entraînez-vous à repérer l'alignement avec le centre, puis à déterminer le signe et la valeur du rapport. Avec cette méthode, les exercices deviennent beaucoup plus simples à corriger.

Mis à jour le 05 mai 2026

Continue sur maths-college.fr

Maths collège - Document pédagogique