



# Le théorème des valeurs intermédiaires se comprend en terminale

Comprends le TVI avec une leçon claire, une méthode, des exercices corrigés et un PDF à imprimer pour t'entraîner en terminale.

Cours de mathématiques niveau

Prénom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

Version imprimable

**Le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'une fonction continue sur un intervalle prend toutes les valeurs comprises entre deux images. Il sert surtout à prouver qu'une équation admet au moins une solution, même quand on ne sait pas calculer cette solution exactement.**

Une courbe passe de la valeur négative  $-2$  à la valeur positive  $3$  sans rupture : elle doit forcément traverser le niveau  $0$ . C'est l'idée à garder pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires avec confiance. En terminale, tu l'emploies pour justifier l'existence d'une solution à une équation du type  $f(x) = k$ . Avant d'écrire le théorème, vérifie toujours trois points : la fonction est continue, l'intervalle est bien choisi, et la valeur visée est comprise entre les deux images. Ensuite, la rédaction devient courte, solide et facile à relire.

## Comprendre le théorème des valeurs intermédiaires sans jargon

En terminale, imagine une courbe tracée au tableau *sans lever le crayon*. Elle part d'une hauteur  $f(a)$  et arrive à une hauteur  $f(b)$ . Impossible de passer de l'une à l'autre sans traverser les niveaux entre les deux. C'est l'idée du **théorème des valeurs intermédiaires**. Sur un **intervalle fermé**  $[a ; b]$ , si  $f$  est une **fonction continue**, alors toute valeur  $k$  comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  est atteinte au moins une fois : il existe donc un réel  $c$  in  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

Attention au piège. Le **TVI** prouve une existence, pas toujours un calcul exact. Tu sais qu'une solution existe, mais tu ne connais pas forcément sa valeur précise. Wikipédia présente aussi ce résultat, appelé **théorème de Bolzano** en référence à Bernard Bolzano,

comme un résultat central d'analyse sur les fonctions continues. La continuité signifie ici qu'une petite variation de  $x$  ne provoque pas de rupture brutale de  $f(x)$ . Si la courbe saute ou présente un trou, le raisonnement peut échouer.

## Méthode pas à pas pour appliquer le TVI dans un exercice

En terminale, devant  $f(x)=x^2-2$  sur le segment  $[1 ; 2]$ , tu cherches une **racine** sans connaître sa valeur exacte. Bonne stratégie. Pour **appliquer le TVI**, ta copie doit faire apparaître les mots attendus : **continuité sur un intervalle**, calcul des **valeurs aux bornes**, encadrement de la valeur visée, puis conclusion d'existence. Le théorème des valeurs intermédiaires sert à prouver qu'une *équation admet une solution*, pas à calculer directement cette solution.

1. Vérifie que la fonction est continue sur l'intervalle étudié, par exemple une fonction polynomiale sur tout segment.
2. Calcule les images des deux bornes :  $f(a)$  et  $f(b)$ .
3. Regarde si le nombre recherché  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .
4. Écris la conclusion : il existe au moins un réel  $c$  in  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .
5. Ajoute la limite : le TVI donne l'existence, mais pas forcément l'unicité.

Voir le corrigé

**Exercice 1.** Pour  $f(x) = x^2 - 2$  sur  $[1 ; 2]$ , la fonction est polynomiale, donc continue sur cet intervalle. On calcule  $f(1) = 1^2 - 2 = -1$  et  $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ . Comme 0 est compris entre -1 et 2, le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe au moins un réel  $c$  in  $[1 ; 2]$  tel que  $f(c) = 0$ . L'équation  $x^2 - 2 = 0$  admet donc au moins une solution sur  $[1 ; 2]$  ; le TVI prouve son existence, même sans donner directement sa valeur exacte.

*Maths Tle, démonstration : Théorème des valeurs intermédiaires — LesEditionsHatier*

## Arbre de décision : TVI, corollaire ou théorème de la bijection ?

En terminale, si tu dois résoudre  $f(x) = 0$  sur  $[a, b]$ , demande-toi d'abord : cherche-t-on seulement une existence ? Réflexe simple. Le **Théorème des valeurs intermédiaires** suffit si  $f$  est continue et si la valeur visée est comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Pour une **unique solution**, ajoute une vérification : la

fonction est-elle strictement croissante ou décroissante ? La monotonie transforme l'existence en unicité.

| Outil                           | À utiliser quand...                                  | Conclusion                        |
|---------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>TVI</b>                      | $f$ continue, valeur entre deux images               | au moins une solution             |
| <b>corollaire du TVI</b>        | $f$ continue et <i>strictement monotone</i>          | une seule solution                |
| <b>théorème de la bijection</b> | $f$ continue, strictement monotone sur un intervalle | existence et unicité dans l'image |

Attention au mauvais outil. Le **théorème de Rolle** ne sert pas à prouver directement qu'une équation admet une solution : Wikipédia le rattache à l'annulation d'une **dérivée** entre deux points où la fonction prend la même valeur. Il aide plutôt à étudier les variations ou les zéros de  $f'$ . Si la continuité manque, le TVI peut échouer ; si la fonction monotone ne l'est pas strictement, l'unicité n'est pas garantie.

## Mini-diagnostic : les cas où le TVI ne s'applique pas

Trois refus suffisent souvent à repérer les **erreurs fréquentes TVI** : absence de continuité, valeur cible hors des bornes, ou **intervalle mal choisi**. Le TVI ne s'applique pas si la fonction n'est pas continue sur l'intervalle choisi, si la valeur visée n'est pas entre les valeurs aux bornes, ou si l'intervalle annoncé ne correspond pas à la zone étudiée. Conclusion interdite.

- Repère une **fonction non continue** avec trou : si  $f(x) = x$  sauf  $f(1) = 5$  sur  $[0; 2]$ , la courbe est coupée en  $x = 1$ , donc la continuité manque.
- Refuse une **fonction définie par morceaux** avec saut : si  $f(x) = 0$  pour  $x < 1$  et  $f(x) = 2$  pour  $x \geq 1$ , la valeur 1 n'est jamais prise.
- Vérifie le **changement de signe** seulement après la continuité :  $f(a) \times f(b) < 0$  ne suffit pas si la courbe saute entre  $a$  et  $b$ .
- Corrige l'intervalle : si tu étudies  $[1; 3]$  mais que le signe change sur  $[-2; 0]$ , l'argument ne prouve rien pour la zone demandée.
- Distingue le **théorème des valeurs extrêmes** : selon Wikipédia, le résultat de **Weierstrass** affirme qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint un **minimum** et un **maximum**, pas qu'elle prend une valeur donnée.

## Activité graphique corrigée : lire une solution avant de la calculer

En terminale, devant une **courbe représentative** tracée sur  $[-1 ; 3]$ , prends une hauteur  $k$  et imagine la **droite horizontale** d'équation  $y = k$ . Simple lecture. Si tu observes que  $f(-1)$  est sous cette hauteur tandis que  $f(3)$  est au-dessus, et que la courbe ne présente ni trou ni saut visible, alors le **théorème des valeurs intermédiaires** affirme qu'il existe au moins un réel  $c \in [-1 ; 3]$  tel que  $f(c) = k$ . Cette activité graphique TVI consiste donc à repérer les bornes, vérifier visuellement la continuité, encadrer la *valeur intermédiaire*, puis conclure sans calcul lourd.

La correction d'un **exercice corrigé TVI** se formule ainsi :  $f$  semble continue sur  $[-1 ; 3]$ , la valeur  $k$  est comprise entre  $f(-1)$  et  $f(3)$ , donc l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution sur cet intervalle. Attention. La *lecture graphique* donne seulement une solution approchée, car l'œil estime l'abscisse du point d'intersection. Le TVI, lui, donne une preuve d'existence. Pour affiner ensuite cette approximation, on peut appliquer la **méthode de dichotomie**, souvent présentée dans les ressources d'analyse comme Bibm@th : on coupe l'intervalle en deux, puis on garde le morceau où le changement d'encadrement persiste.

Voir le corrigé

**Exercice 2.** Sur la lecture graphique dans  $[-1 ; 3]$ , on vérifie d'abord que la courbe ne présente pas de rupture visible, ce qui permet de considérer  $f$  comme continue sur l'intervalle étudié. Si  $f(-1)$  est en dessous de la hauteur  $k$  et si  $f(3)$  est au-dessus, alors  $k$  est bien compris entre  $f(-1)$  et  $f(3)$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un réel  $c \in [-1 ; 3]$  tel que  $f(c) = k$ . La réponse attendue est une existence de solution ; l'abscisse lue sur le graphique n'est qu'une approximation, à améliorer éventuellement par dichotomie.

## Ce que vous nous demandez

### Comment trouver la continuité d'une fonction ?

Pour vérifier qu'une fonction est continue sur un intervalle, regarde d'abord son type. Les fonctions polynômes, affines, constantes, exponentielles, sinus et cosinus sont continues sur leur domaine. Une fraction rationnelle est continue là où son dénominateur n'est pas nul. Pour une fonction avec racine carrée, vérifie que l'expression sous la racine est positive.

## Comment calculer le TVI ?

On ne “calcule” pas directement le théorème des valeurs intermédiaires : on l'utilise. Vérifie que la fonction  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , puis calcule  $f(a)$  et  $f(b)$ . Si un nombre  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors il existe au moins un réel  $c$  in  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

## Quand utiliser le corollaire du TVI ?

Utilise le corollaire du TVI quand tu veux prouver qu'une équation  $f(x) = k$  admet une unique solution. Il faut montrer deux choses : la fonction est continue sur l'intervalle et elle est strictement monotone, c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante. Ensuite, si  $k$  est entre les deux valeurs extrêmes, la solution existe et elle est unique.

## Quand utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ?

Utilise le théorème des valeurs intermédiaires quand tu dois prouver l'existence d'une solution, sans forcément la trouver exactement. Il sert souvent pour une équation du type  $f(x) = k$  ou  $f(x) = 0$ . Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et si  $k$  est entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors une solution existe dans l'intervalle.

## Comment démontrer qu'une équation admet une unique solution ?

Pour démontrer qu'une équation admet une unique solution, utilise souvent le corollaire du TVI. Étudie la continuité de  $f$ , puis sa monotonie sur l'intervalle choisi. Calcule ensuite les valeurs aux bornes. Si  $f$  est continue, strictement monotone, et si 0 est entre  $f(a)$  et  $f(b)$  pour l'équation  $f(x) = 0$ , alors il existe une seule solution.

## Comment faire un TVI ?

Commence par écrire l'intervalle étudié, par exemple  $[a; b]$ . Vérifie que  $f$  est continue sur cet intervalle. Calcule ensuite  $f(a)$  et  $f(b)$ . Compare le nombre visé  $k$  avec ces deux valeurs. Si  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , conclus qu'il existe au moins une solution  $c$  in  $[a ; b]$  telle que  $f(c) = k$ .

## Quelles sont les fonctions continues ?

Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions affines, constantes, exponentielles, sinus et cosinus le sont aussi sur leur domaine. Les fonctions rationnelles sont continues partout où le dénominateur n'est pas nul. Les fonctions avec racine carrée sont continues là où l'expression sous la racine est positive ou nulle. Les sommes, produits et compositions de fonctions continues restent continues.

## Comment calculer les valeurs intermédiaires ?

Pour utiliser les valeurs intermédiaires, calcule les images aux bornes :  $f(a)$  et  $f(b)$ . Tous les nombres compris entre ces deux résultats sont des valeurs intermédiaires possibles. Par exemple, si  $f(a) = 2$  et  $f(b) = 7$ , alors tout nombre entre 2 et 7 peut être atteint par  $f$  si la fonction est continue sur  $[a; b]$ .

### Vite dit

**Le TVI suffit-il pour prouver qu'une solution est unique ?** — Non. Le TVI prouve seulement l'existence d'au moins une solution. Pour l'unicité, il faut généralement ajouter la stricte monotonie de la fonction.

**Pourquoi faut-il vérifier la continuité avant d'utiliser le TVI ?** — La continuité est l'hypothèse centrale du théorème. Sans elle, la courbe peut sauter une valeur intermédiaire et l'argument d'existence devient faux.

**Quelle différence entre changement de signe et TVI ?** — Le changement de signe est souvent une application du TVI avec la valeur 0. Il ne suffit pas à lui seul : il faut aussi justifier que la fonction est continue sur l'intervalle.

**Comment obtenir une valeur approchée après le TVI ?** — Après avoir prouvé l'existence, on peut réduire l'intervalle par dichotomie ou utiliser la calculatrice pour encadrer plus précisément la solution.

Pour réussir un exercice sur le théorème des valeurs intermédiaires, commence par encadrer la valeur cherchée entre deux images, puis vérifie la continuité sur l'intervalle. Si la fonction est aussi strictement monotone, tu peux conclure à une solution unique avec le corollaire. Télécharge le PDF, entraîne-toi sur les exercices progressifs, puis utilise la correction pour repérer précisément les étapes à améliorer.

[Continue sur maths-college.fr](https://maths-college.fr)

Maths collège - Document pédagogique